מבחן המנה

מבחן המנה בודק את קצב הגידול (או הדעיכה) של טור באמצעות בחינת היחס שבין איבר כלשהו בטור לבין קודמו: $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

בטור הנדסי יחס זה קבוע ומכונה q , והטור מתכנס אם $|q| < 1$.
בטור שאינו הנדסי יחס זה אינו קבוע, אלא תלוי במקומם של שני האיברים הסמוכים.
עם זאת, ייתכן שטור כזה מקבל "אופי הנדסי" כאשר $n \to \infty$, ואז היחס שבין איבר לקודמו **שואף** להתקבע על ערך כלשהו q^*.
מבחן המנה אומר שאם כך הוא, ואם $|q^*| < 1$, אזי הטור מתכנס.

תיאורמה 12 : מבחן המנה יהא $\sum a_n$ טור שאיבריו חיוביים ונניח ש- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q^*$. או אז מתקיים: א) הטור $\sum a_n$ מתכנס אם $q^* < 1$ ב) הטור $\sum a_n$ מתבדר אם $1 < q^*$ ג) התוצאה אינה חד משמעית אם $q^* = 1$

דוגמה מהספר (עמ' 783):

א) האם הטור $\cdots + \frac{2^n+5}{3^n} + \cdots + \frac{7}{27} + \frac{13}{27} + 1 + \frac{7}{3} + 6 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+5}{3^n}$ מתכנס?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+5}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{2^n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2\cdot 2^n+5)\cdot 3^n}{(3\cdot 3^n)\cdot(2^n+5)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 6^n+5\cdot 3^n}{3\cdot 6^n+15\cdot 3^n} = \frac{1}{3}\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 6^n+5\cdot 3^n}{6^n+5\cdot 3^n} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{6^n+6^n+5\cdot 3^n}{6^n+5\cdot 3^n} = \frac{1}{3}\cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{6^n}{6^n+5\cdot 3^n}+1\right) = \frac{1}{3}\cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}+1\right) = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{1+5\cdot 0}+1\right) = \frac{2}{3}$$

ובכן, הטור מתכנס כי $q^* = \frac{2}{3} < 1$. חדי העין ודאי יזהו שמדובר כאן בעצם בשני טורים הנדסיים ששולבו יחדיו:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+5}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n + 5\cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 3 + 5\cdot\frac{3}{2} = 10.5$$

וכך ישיגו את הגבול שאליו מתכנס הטור, במקום רק את הידיעה שהוא מתכנס. אם כבר אז כבר...

ב) האם הטור $\cdots + \frac{(2n)!}{n!\cdot n!} + \cdots + 70 + 20 + 6 + 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\cdot n!}$ מתכנס?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\cdot(n+1)!} \cdot \frac{n!\cdot n!}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)}{n!\cdot(n+1)\cdot n!\cdot(n+1)} \cdot \frac{n!\cdot n!}{(2n)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)\cdot(2n+2)}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(2n+1)\cdot(n+1)}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(2n+1)}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n+2}{n+1} = 4$$

הטור מתבדר ע"פ מבחן המנה כי $q^* = 4 > 1$.
הוא מתבדר גם ע"פ תיאורמה 7 : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר אם $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ או שאינו קיים .
בטור זה $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ כי כל איבר גדול מקודמו (ע"פ היחס: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4n+2}{n+1}$), והאיבר הראשון חיובי.

ג) האם הטור $\cdots + \frac{4^n \cdot n! \cdot n!}{(2n)!} + \cdots + \frac{128}{35} + \frac{16}{5} + \frac{8}{3} + 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot n! \cdot n!}{(2n)!}$ מתכנס?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}\cdot(n+1)!\cdot(n+1)!}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{4^n\cdot n!\cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot 4^n\cdot n!\cdot(n+1)\cdot n!\cdot(n+1)}{(2n)!\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)} \cdot \frac{(2n)!}{4^n\cdot n!\cdot n!} =$$

$$\lim_{n\to\infty} = \frac{4(n+1)^2}{(2n+1)\cdot(2n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{4(n+1)^2}{2(2n+1)\cdot(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)^2}{(2n+1)\cdot(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+2}{2n+1} = 1$$

התוצאה אינה חד משמעית כי $q^* = 1$

עלינו לחפש מוצא אחר... ונפנה לתיאורמה 7 : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר אם $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ או שאינו קיים .

בטור זה $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ כי כל איבר גדול מקודמו (ע"פ היחס: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+2}{2n+1}$), והאיבר הראשון חיובי. **הטור מתבדר!**

<u>מבחן השורש</u>

מבחני ההתכנסות לטורים שבהם דנו עד כה פועלים היטב כאשר מדובר באיבר כללי פשוט.
כעת נתבונן בטור שאיברו הכללי מורכב יותר:

האם הטור $\sum a_n$ מתכנס? $$a_n = \begin{cases} n/2^n \ , & n \text{ אי – זוגי} \\ 1/2^n \ , & n \text{ זוגי} \end{cases}$$

<u>פיתרון</u> נכתוב כמה איברים של הטור :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{16} + \frac{5}{32} + \frac{1}{64} + \frac{7}{128} + \cdots$$

אין זה טור הנדסי (האדום כן). מאידך, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ כך שיש מצב להתכנסות. מבחן האינטגרל אינו נראה מבטיח כאן.
מבחן המנה מביא למצב בעייתי שבו היחס בין איבר לקודמו אינו מתייצב על q^* אלא מתנודד בין "קטן מאוד" לבין "ענק".

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n} = \frac{2^n}{2n\cdot 2^n} = \frac{1}{2n} \ , & n \text{ אי – זוגי} \quad => \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 \\ \frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{1} = \frac{(n+1)\cdot 2^n}{2\cdot 2^n} = \frac{n+1}{2} \ , & n \text{ זוגי} \quad => \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty \end{cases}$$

מבחן אשר "יוציאנו מהפלונטר" ויראה שטור זה מתכנס, הוא מבחן השורש.

תיאורמה 13 : מבחן השורש
יהא $\sum a_n$ טור שאיבריו אינם שליליים לכל $N \leq n$, ונניח ש- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$. או אז מתקיים:
א) הטור $\sum a_n$ מתכנס אם $\rho < 1$
ב) הטור $\sum a_n$ מתבדר אם $1 < \rho$
ג) התוצאה אינה חד משמעית אם $\rho = 1$

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[n]{n/2^n} = \sqrt[n]{n} \,/\, \sqrt[n]{2^n} = \sqrt[n]{n}/2 \ , & n \text{ אי – זוגי} \quad => \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}/2 = 1/2 \\ \sqrt[n]{1/2^n} = \sqrt[n]{1^n}/\sqrt[n]{2^n} = 1/2 \ , & n \text{ זוגי} \quad => \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} 1/2 = 1/2 \end{cases}$$

קיבלנו שמתקיים $\sqrt[n]{a_n} \to 1/2 < 1$ גם עבור המקומות הזוגיים וגם עבור המקומות האי-זוגיים, **ז"א הטור מתכנס.**
מתמטית מדויק יותר לומר שבסדרת השורשים ה- "nיים" ערכו של כל איבר הוא לפחות $1/2$ ולכל היותר $\sqrt[n]{n}/2$, ז"א,
לכל a_n בטור הנתון מתקיים $1/2 \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{n}/2$, ומכיוון ש- $\sqrt[n]{n}/2 \to 1/2$, מתקיים $\sqrt[n]{a_n} \to 1/2$ ע"פ כלל הסנדוויץ'. אם כך, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1/2 < 1$ והטור מתכנס.