טורי חזקות

טור חזקות הוא פולינום בעל אינסוף איברים - רב איבר המכיל את x בכל החזקות השלמות שלו.
ניתן לחבר טורי חזקות, לחסרם, להכפילם, לגוזרם ולעשות להם אינטגרציה.

<u>הגדרות</u>: טורי חזקות, מרכז, מקדמים

טור חזקות סביב $x = 0$ (טור מקלורן) הוא טור מהצורה:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + \ldots + c_n \cdot x^n + \cdots$$

טור חזקות סביב $x = a$ (טור טיילור) הוא טור מהצורה:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-a)^n = c_0 + c_1 \cdot (x-a) + c_2 \cdot (x-a)^2 + \ldots + c_n \cdot x^n + \cdots$$

המרכז a והמקדמים $\ldots \,,\, c_n \,,\, \ldots \,,\, c_2 \,,\, c_1 \,,\, c_0$ הינם קבועים.

תחום ההתכנסות של טורי חזקות

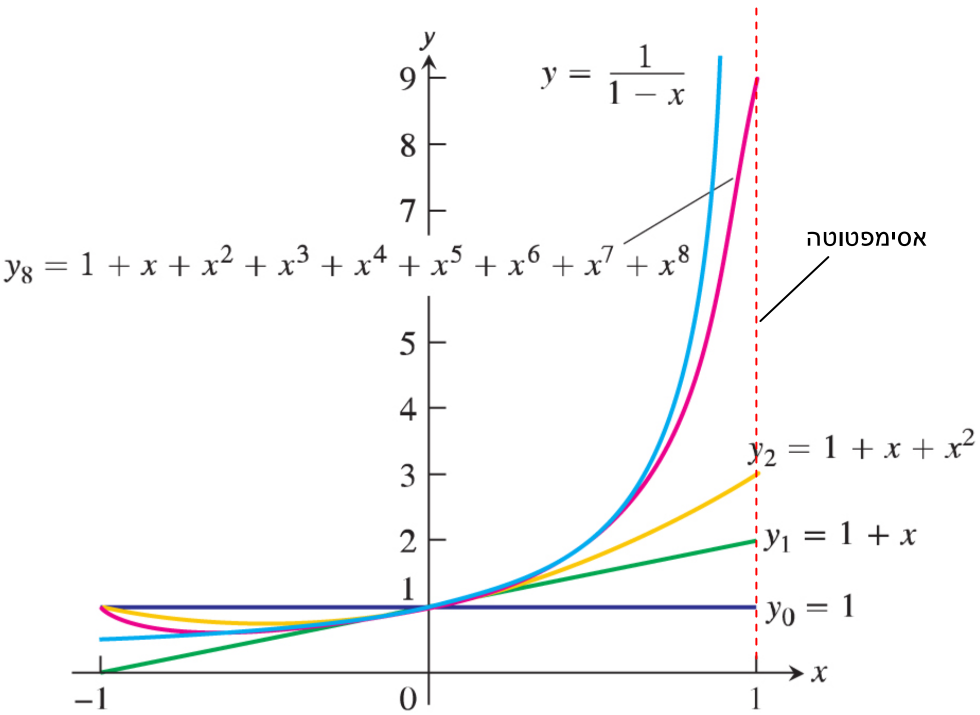
עד עתה דנו בטורים שאיבריהם קבועים, לכן שאלנו אם הטור מתכנס.
כעת אנו דנים בטורים שאיבריהם **אינם** קבועים אלא תלויים בערכו של x , לכן נשאל **עבור אילו ערכים של** x הטור מתכנס.

דוגמאות מהספר (עמ' 795):

א) טור חזקות סביב $x = 0$, שבו כל המקדמים שווים ל- 1 : $\quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \cdots$
זהו טור הנדסי שבו $a_1 = 1$, $q = x$, לכן הוא מתכנס ל- $\frac{1}{1-x}$ עבור $|x| < 1$. נכתוב זאת כך :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \cdots \qquad , \qquad -1 < x < 1$$

עד כה התייחסנו לאגף שמאל של המשוואה כאל נוסחה לסכומו של הטור ההנדסי שבאגף ימין .
כעת נשנה מבט ונחשוב על **הסכומים החלקיים** שבאגף ימין כעל פולינומים המדמים את הפונקציה שבאגף שמאל.
עבור ערכי x קרובים לאפס, מספיק סכום חלקי מועט איברים כדי לדמות את הפונקציה (להשיג קירוב טוב שלה).
ככל ש- x מתרחק מאפס, נדרשים לשם כך יותר איברים.
התמונה הבאה ממחישה זאת. מוצגים בה הגרפים של הסכומים החלקיים $S_0 \,, S_1 \,, S_2 \,, S_8$, והגרף של $S_{n\to\infty} = \frac{1}{1-x}$.



ככל שהסכום **החלקי** של הטור מכיל יותר איברים, הוא דומה יותר לסכום הטור כולו, ז"א לפונקציה.
בקרבת $x = 0$ מהווה סכום חלקי בן שני איברים (S_1) קירוב סביר.
כש- $x \to \pm 1$ לא מספיק גם סכום חלקי בן תשעה איברים (S_8) לשם כך.
כש- $x = 1$ הפונקציה אינה מוגדרת, וכש- x גדול מ- 1 או קטן/שווה ל- -1 הטור מתבדר ואינו מדמה כלל את הפונקציה.

ב) טור חזקות סביב $x = 2$, שבו המקדמים הם $c_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, ... , $c_2 = \frac{1}{4}$, $c_1 = -\frac{1}{2}$, $c_0 = 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n = 1 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2 - \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n + \cdots$$

זהו טור הנדסי שבו $a_1 = 1$, $q = -\frac{x-2}{2}$. התנאי להתכנסותו של טור הנדסי הוא $|q| < 1$, ז"א :

$$\left|-\frac{x-2}{2}\right| < 1 \quad => \quad |x-2| < 2 \quad => \quad -2 < x-2 < 2 \quad => \quad 0 < x < 4$$

ובכן, כדי שהטור יתכנס על ערכו של x להיות בין אפס לארבע, אחרת הטור מתבדר. ולאיזה ערך הוא מתכנס?

ע"פ הנוסחה לסכומו של טור הנדסי אינסופי, הוא מתכנס לערך $S_{n\to\infty} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1+\frac{x-2}{2}} = \frac{2}{2+x-2} = \frac{2}{x}$

נכתוב זאת כך :

$$\frac{2}{x} = 1 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2 - \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n + \cdots \qquad , \qquad 0 < x < 4$$

לשם בהירות נפרט את שלושת הסכומים החלקיים הראשונים של הטור (האינדקס מתחיל ב- $n = 0$) :

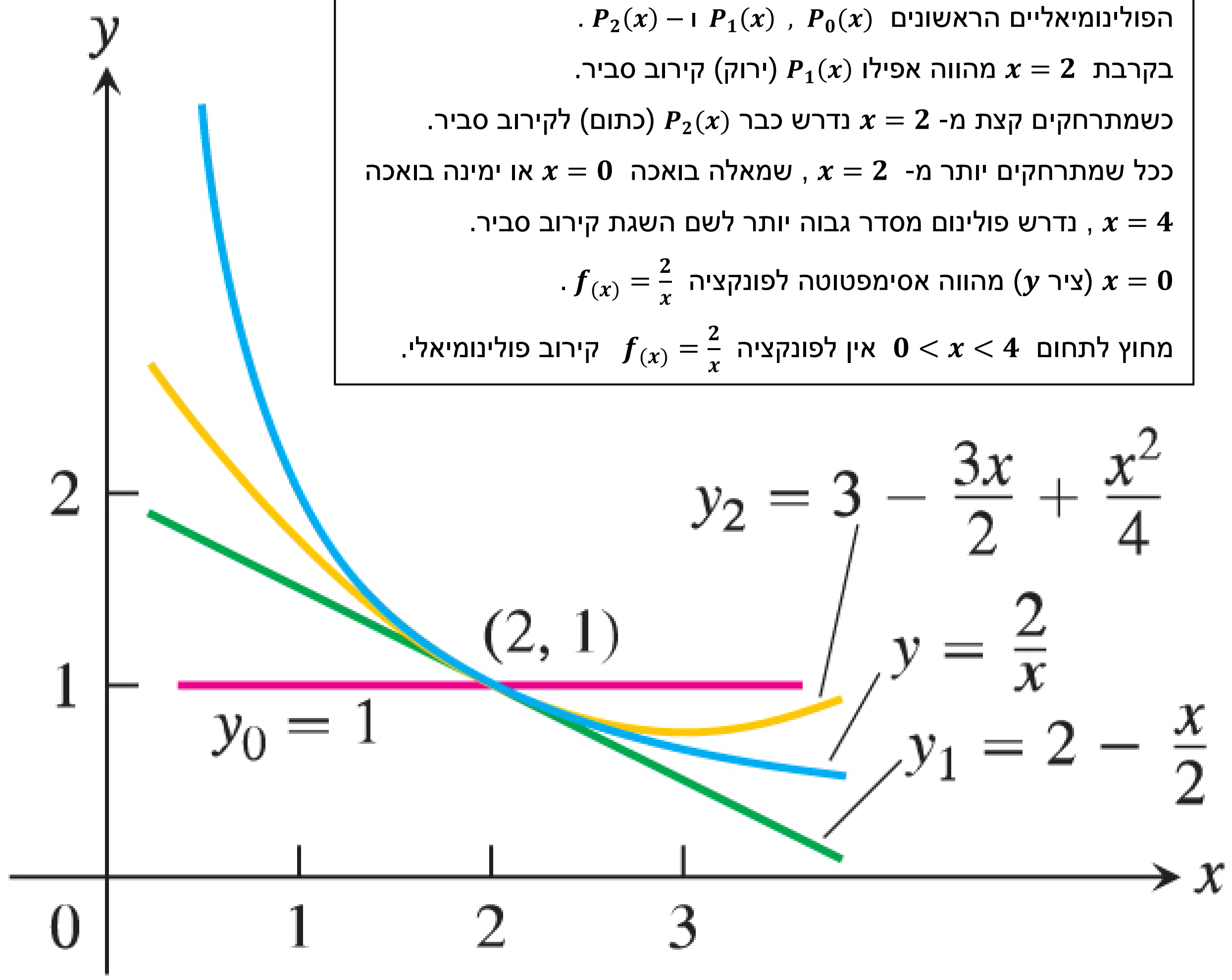
$$S_0 = 1 \quad => \quad P_0(x) = 1$$

$$S_1 = 1 - \frac{1}{2}(x-2) \quad => \quad P_1(x) = 2 - \frac{x}{2}$$

$$S_2 = 1 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2 \quad => \quad P_2(x) = 3 - \frac{3x}{2} + \frac{x^2}{4}$$

כשמדובר בטורי חזקות הסכומים החלקיים הם פולינומים, ולכן מקובל לסמנם $P_n(x)$ במקום S_n

באיור מוצג גרף הפונקציה $f_{(x)} = \frac{2}{x}$ (כחול) ושלושת קירוביה הפולינומיאליים הראשונים $P_0(x)$, $P_1(x)$ ו – $P_2(x)$.
בקרבת $x = 2$ מהווה אפילו $P_1(x)$ (ירוק) קירוב סביר.
כשמתרחקים קצת מ- $x = 2$ נדרש כבר $P_2(x)$ (כתום) לקירוב סביר.
ככל שמתרחקים יותר מ- $x = 2$, שמאלה בואכה $x = 0$ או ימינה בואכה $x = 4$, נדרש פולינום מסדר גבוה יותר לשם השגת קירוב סביר.
$x = 0$ (ציר y) מהווה אסימפטוטה לפונקציה $f_{(x)} = \frac{2}{x}$.
מחוץ לתחום $0 < x < 4$ אין לפונקציה $f_{(x)} = \frac{2}{x}$ קירוב פולינומיאלי.



__דוגמאות לבדיקת תחום ההתכנסות של טורי חזקות לא הנדסיים:__

א) טור חזקות סביב $\boldsymbol{x=0}$: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n} = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}+\cdots$

נבדוק לאילו ערכי x הטור הנתון מתכנס באופן מוחלט, ז"א לאילו ערכי x הטור $\sum\left|(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}\right|$ מתכנס.

נרשום אותו במפורט: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x^n}{n}\right| = |x|+\left|\frac{x^2}{2}\right|+\left|\frac{x^3}{3}\right|+\cdots+\left|\frac{x^n}{n}\right|+\cdots$

אין בטור זה איברים שליליים אז אפשר להשתמש במבחן המנה:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|\cdot\left|\frac{n}{x^n}\right|\right\}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\cdot x\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot|x|=|x|$$

ע"פ מבחן המנה, טור מתכנס כאשר מתקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$, במקרה דנן, כאשר $|x|<1$.

אם כך, הטור הנתון מתכנס באופן מוחלט כאשר $-1<x<1$.

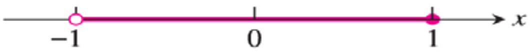
האם ישנם ערכים של x מחוץ לתחום זה שעבורם הטור הנתון מתכנס ?

כאשר $1<x$ או $x<-1$ ודאי שלא, כי **לא** מתקיים $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ כך שהטור מתבדר.

כאשר $x=1$ מתקבל $\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$, טור הרמוני מתחלף <= מתכנס בתנאי, כידוע.

כאשר $x=-1$ מתקבל $\sum_1^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{(-1)^n}{n}=\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{n}=\sum_1^{\infty}\left(\frac{-1}{n}\right)=-\sum_1^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$, טור הרמוני שלילי <= מתבדר.

לסיכום, הטור הנתון מתכנס כאשר $-1<x\le 1$ ומתבדר לכל x אחר.



ב) טור חזקות סביב $\boldsymbol{x=0}$: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$

נבדוק לאילו ערכי x הטור הנתון מתכנס באופן מוחלט, ז"א לאילו ערכי x הטור $\sum\left|(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right|$ מתכנס.

נרשום אותו במפורט: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right| = |x|+\left|\frac{x^3}{3}\right|+\left|\frac{x^5}{5}\right|+\cdots+\left|\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right|+\cdots$

אין בטור זה איברים שליליים אז אפשר להשתמש במבחן המנה :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{x^{2n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n-1}{2n+1}\cdot x^2\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}\cdot x^2=x^2$$

הטור הנתון מתכנס באופן מוחלט כאשר $x^2<1$, ז"א כאשר $-1<x<1$.

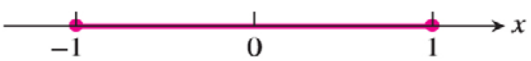
הוא מתבדר כאשר $1<x$ או $x<-1$, כי **לא** מתקיים אז $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

כאשר $x=1$ מתקבל $\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots$, טור מתחלף העומד בתנאי לייבניץ <= מתכנס (בתנאי).

כאשר $x=-1$ מתקבל $\sum_1^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{(-1)^{2n-1}}{2n-1}=\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^{3n-2}}{2n-1}=\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}=-\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots\right)$

זהו המינוס של טור מתחלף העומד בתנאי לייבניץ <= מתכנס (בתנאי).

לסיכום, הטור הנתון מתכנס כאשר $-1\le x\le 1$ ומתבדר לכל x אחר.

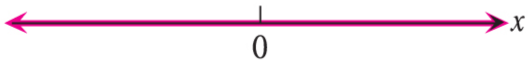


ג) טור חזקות סביב $x = 0$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$

לאחר שבדוגמאות א' ו- ב' פירטנו את שלבי ההכנה למבחן המנה, נשתמש מעתה בקיצור דרך מקובל אשר מגלם בתוכו את אותם שלבים, היינו, נרשום ישירות $1 > \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| lim_{n\to\infty}$ כתנאי הנדרש להתכנסות הטור. אם כך :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x\cdot x^n}{n!\cdot(n+1)}\cdot\frac{n!}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{(n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cdot|x| = 0 < 1$$

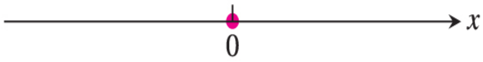
זהו פסוק אמת אשר אינו תלוי בערכו של x , ז"א הטור מתכנס לכל x .



ד) טור חזקות סביב $x = 0$: $\sum_{n=0}^{\infty} n!\cdot x^n = x^0 + x + 2!\cdot x^2 + 3!\cdot x^3 + \cdots + n!\cdot x^n + \cdots$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\cdot x^{n+1}}{n!\cdot x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!\cdot(n+1)\cdot x\cdot x^n}{n!\cdot x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|(n+1)\cdot x| = \lim_{n\to\infty}(n+1)\cdot|x| = \infty\cdot|x|$$

התוצאה גדולה מ- 1 למעט כאשר $x = 0$, לכן הטור מתבדר לכל $x \neq 0$
.



הדוגמאות שהובאו כאן מראות כיצד יש לבדוק התכנסות של טורי חזקות, ואת התוצאות האפשריות של בדיקה כזו.

תיאורמה 18: תיאורמת ההתכנסות של טורי חזקות

אם טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot x^n = a_0 + a_1\cdot x + a_2\cdot x^2 + \ldots + a_n\cdot x^n + \cdots$

מתכנס עבור $x = c \neq 0$, אז הוא מתכנס באופן מוחלט לכל x המקיים $|x| < |c|$.

אם הטור מתבדר עבור $x = d$ אז הוא מתבדר לכל x המקיים $|x| > |d|$.

<u>רדיוס ההתכנסות של טור חזקות</u>

תיאורמה 18 ושש הדוגמאות שהובאו קודם מובילות למסקנה שלטור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot(x-a)^n$ ישנן שלוש אפשרויות:

1) להתכנס עבור $x = a$ בלבד 2) להתכנס לכל x 3) להתכנס באינטרוול מסוים שמרכזו $x = a$ ורדיוסו **R**.

R הוא **רדיוס ההתכנסות** של טור החזקות, והאינטרוול שמרכזו $x = a$ ורדיוסו **R** מכונה **אינטרוול ההתכנסות** .

אינטרוול ההתכנסות יכול להיות פתוח, סגור, או חצי פתוח - תלוי בטור הנדון. עבור ערכי x שבתוך אינטרוול ההתכנסות, הטור מתכנס באופן מוחלט. אם הטור מתכנס לכל x , אז $R = \infty$. אם הטור מתכנס רק עבור $x = a$, אז $R = 0$.

סיכום - כיצד לבדוק התכנסות של טור חזקות :

1. נשתמש במבחן המנה (או מבחן השורש) למציאת האינטרוול שבו הטור מתכנס באופן מוחלט.
   לרוב זהו אינטרוול פתוח $a - R < x < a + R$, לכן נבדוק גם כל קצה שלו בעזרת מבחן ההשוואה, מבחן האינטגרל, או מבחן הטור המתחלף (מבחן לייבניץ).

2. מחוץ לאינטרוול ההתכנסות הטור מתבדר, כי לא מתקיים $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.