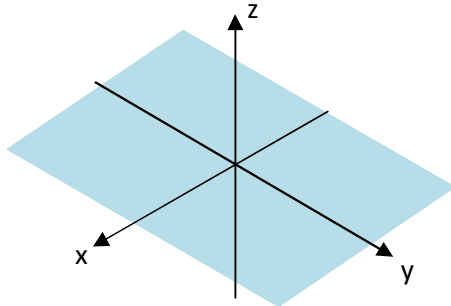
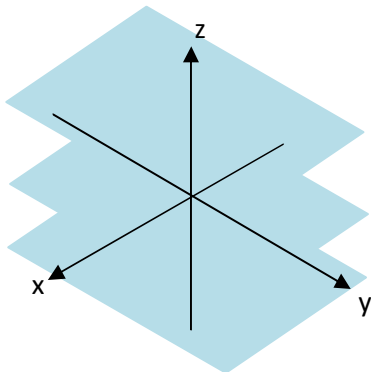


בפונקציה ממשית של יותר ממשתנה אחד, נקבע תחום ההגדרה באמצעות הפרקטיקה המוכרת של סילוק ערכים "לא חוקיים" של המשתנים הבלתי תלויים - כאלה המובילים לחלוקה באפס או להפקה של מספרים מרוכבים (שורש זוגי של מספר שלילי).

בפונקציות של שני משתנים, תחום ההגדרה הוא מישור xy או חלק ממנו:



הטווח (Range)	התחום (Domain)	הפונקציה
$[0, \infty)$	$x^2 \leq y$	$w = \sqrt{y - x^2}$
$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$xy \neq 0$	$w = 1/xy$
$[-1, 1]$	המישור כולו	$w = \sin xy$



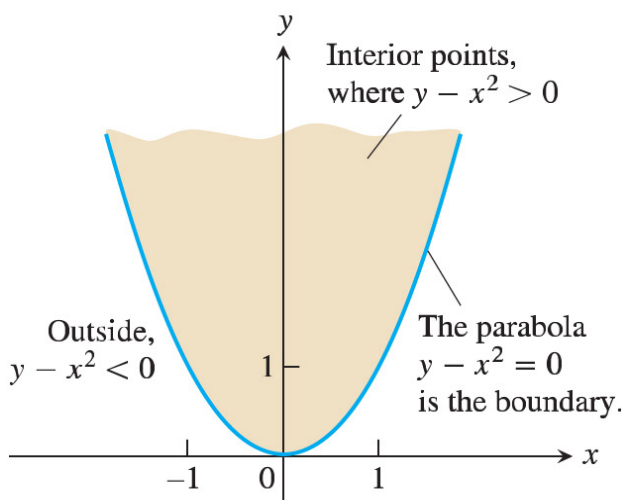
בפונקציות של שלושה משתנים, תחום ההגדרה הוא מרחב xyz או חלק ממנו:

הטווח (Range)	התחום (Domain)	הפונקציה
$[0, \infty)$	המרחב כולו	$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
$(0, \infty)$	$(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$	$w = 1/(x^2 + y^2 + z^2)$
$(-\infty, \infty)$	חצי המרחב $0 < z$	$w = xy \ln z$

דוגמה מהספר (עמ' 968) - תאור תחום ההגדרה של פונקציה בעלת שני משתנים.

תאר את תחום ההגדרה של הפונקציה $w = \sqrt{y - x^2}$.

פיתרון: מאחר שהפונקציה מוגדרת רק היכן שמתקיים $0 \leq y - x^2$, תחום ההגדרה שלה הוא כמראה באיור שמתחת:



תחום ההגדרה של $w = \sqrt{y - x^2}$ הינו השטח הכהה שבאיור, כולל הפרבולה $y = x^2$ אשר מגבילה אותו. זהו תחום סגור (closed) מפני שכל נקודות הגבול שלו (קרי, הפרבולה $y = x^2$) מוכלות בו, אך עם זאת אין הוא מתחום (bounded) כי אינו בר חסימה. הנקודות שמעל הפרבולה מהוות את פנים התחום (domain's interior).

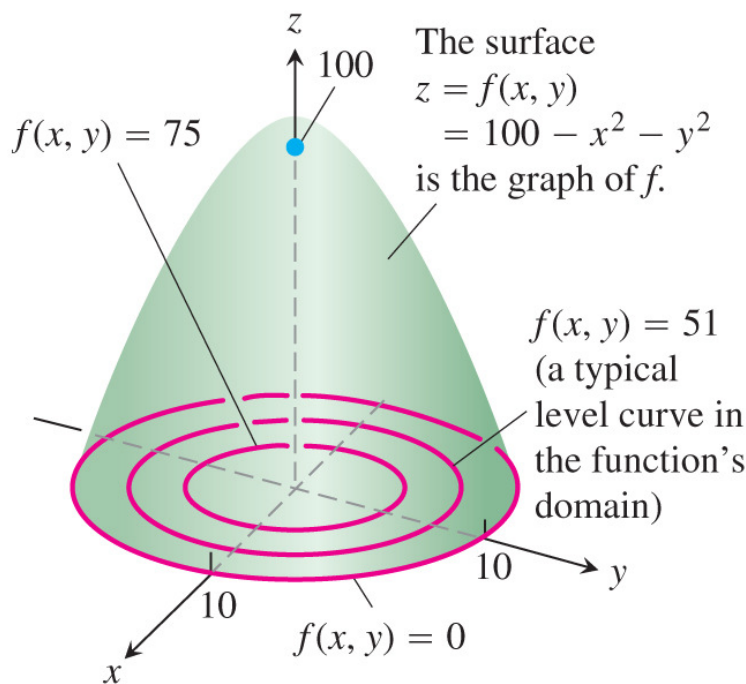
גרפים וקווי רמה של פונקציות של שני משתנים

ישנן שתי דרכים לתאר ערכים של פונקציה $f(x,y)$, האחת באמצעות שרטוט קווים בתחום ההגדרה שלה שעליהם מקבלת הפונקציה ערך קבוע, והשנייה באמצעות ציורו במרחב של המשטח $z = f(x,y)$.

הגדרות: קו רמה (Level Curve), גרף, משטח (Surface)
 אוסף הנקודות במישור שעבורן יש לפונקציה $f(x,y)$ ערך קבוע $(f(x,y) = c)$, נקרא קו רמה של f .
 אוסף כל הנקודות $(x, y, f(x,y))$ במרחב (x, y) שבתחום ההגדרה של f , נקרא הגרף של f .
 הגרף של f נקרא גם המשטח $z = f(x,y)$.

דוגמה מהספר (עמ' 968) – שרטוט פונקציה של שני משתנים.

שרטט את הפונקציה $f(x,y) = 100 - x^2 - y^2$ ואת קווי הרמה עבור $f(x,y) = 0$, $f(x,y) = 51$, $f(x,y) = 75$.
 פיתרון: תחום ההגדרה של f הוא מישור xy כולו, והטווח של f הוא אוסף המספרים הממשיים שאינם גדולים ממאה.
 הגרף הוא הפרבולואידה $z = 100 - x^2 - y^2$ אשר חלקה החיובי מוצג באיור.



קו הרמה $f(x,y) = 0$ הוא אוסף הנקודות במישור xy שבהן

$$f(x,y) = 100 - x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 100$$

ז"א מעגל קבועי שרדיוסו 10.

באופן דומה, קו הרמה $f(x,y) = 51$ הוא מעגל שרדיוסו 7:

$$f(x,y) = 100 - x^2 - y^2 = 51 \Rightarrow x^2 + y^2 = 49$$

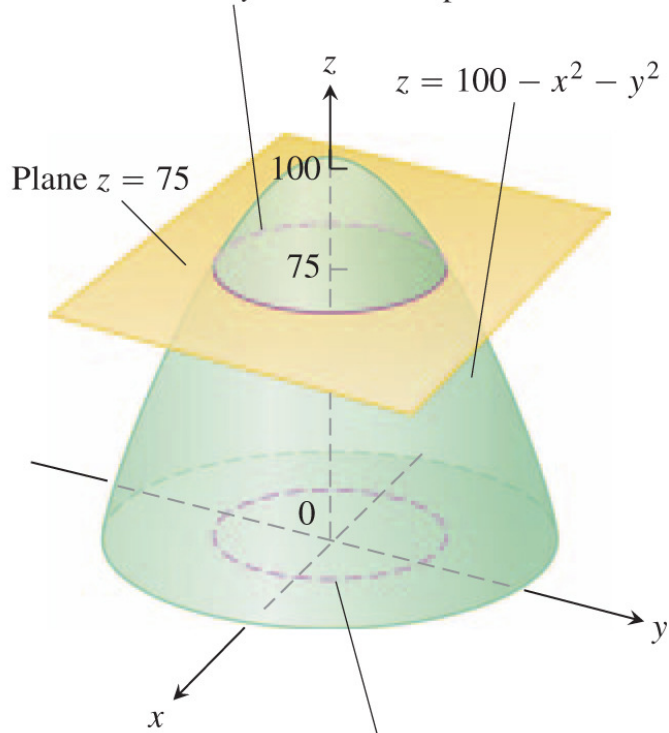
קו הרמה $f(x,y) = 75$ הוא מעגל שרדיוסו 5:

$$f(x,y) = 100 - x^2 - y^2 = 75 \Rightarrow x^2 + y^2 = 25$$

לבסוף, קו הרמה $f(x,y) = 100$ הינו ראשית הצירים.

המישור האופקי $f(x,y) = c$ חותך את המשטח $z = f(x,y)$ בנקודות שוות גובה כך שנוצר רצף אופקי של נקודות **במרחב**.
 רצף זה מכונה **קו הקונטור** $f(x,y) = c$, להבדיל מקו הרמה $f(x,y) = c$ אשר נמצא במישור xy , בתחום ההגדרה של f .

The contour curve $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2 = 75$ is the circle $x^2 + y^2 = 25$ in the plane $z = 75$.



The level curve $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2 = 75$ is the circle $x^2 + y^2 = 25$ in the xy -plane.

באיור, המישור האופקי $z = 75$ חותך את המשטח $z = 100 - x^2 - y^2$ ומתווה עליו את קו הקונטור $f(x,y) = 75$.

קו הקונטור שוכן ישירות מעל המעגל $x^2 + y^2 = 25$, שהינו קו הרמה $f(x,y) = 75$ בתחום ההגדרה של f .

במקרים רבים לא נעשית הבחנה טרמינולוגית בין קווי רמה לקווי קונטור, ושניהם מכונים קווי קונטור (גובה). הקורא צריך אז להיתלות בהקשר, ולהבין בעצמו למי מהשניים מתכוונים.

אגב, תרגום קלוקל הרגיל את דוברי העברית לומר "קו גובה" במקום "קו רמה" ו"קו קונטור" במקום "קו גובה".

במישור, הנקודות שעבורן מקבלת פונקציה של שני משתנים ערך קבוע $f(x,y) = c$ יוצרות קו בתחום ההגדרה של f . במרחב, הנקודות שעבורן מקבלת פונקציה של שלושה משתנים ערך קבוע $f(x,y,z) = c$ יוצרות משטח בתחום ההגדרה של f .

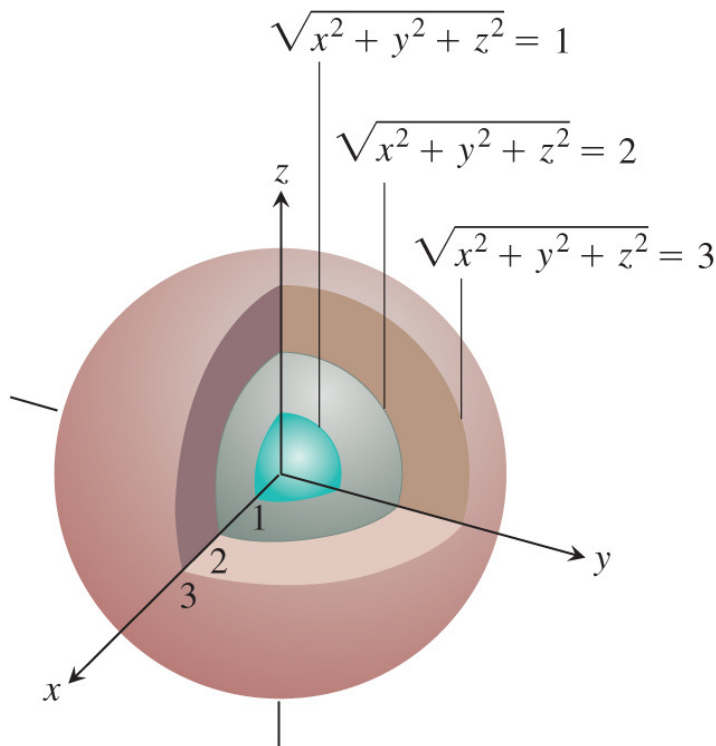
הגדרה: משטח רמה (Level surface) $f(x,y,z) = c$ ערך קבוע, נקרא **משטח רמה של f** .

הגרפים של פונקציות של שלושה משתנים מורכבים מנקודות $(x,y,z, f(x,y,z))$ אשר נמצאות במרחב ארבע ממדי, לכן קשה לנו לשרטטם במערכת הייחוס התלת ממדית שלנו. עם זאת, אנו יכולים להבין כיצד פונקציה כזו מתנהגת ע"י התבוננת במשטחי הרמה התלת ממדיים שלה.

דוגמה מהספר (עמ' 970): תיאור משטחי הרמה של פונקציה בעלת שלושה משתנים.

תאר את משטחי הרמה של הפונקציה $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

פיתרון: ערכה של f הוא מרחקה של הנקודה (x,y,z) מהראשית. כל משטח רמה $(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = c)$ של f הוא מעטפת כדורית (ספרה) שרדיוסה c ומרכזה בראשית.



באזור משמאל מוצגים חתכים של שלוש ספרות כאלה. אין זה גרף של הפונקציה, אלא מבט על משטחי רמה בתחום ההגדרה של הפונקציה. משטחי הרמה מראים כיצד משתנים ערכי הפונקציה שעה שאנו נעים בתחום ההגדרה שלה. אם ננוע על פני ספרה שרדיוסה c , הפונקציה תשמור על ערך קבוע. אם ננוע מספרה אחת לאחרת, ערכה של הפונקציה ישתנה. הוא יגדל אם נתרחק מהראשית ויקטן אם נתקרב לראשית. האופן שבו משתנים ערכי הפונקציה תלוי בכיוון התנועה. התלות בכיוון התנועה חשובה, ונעסוק בה בהמשך.

משטח הרמה $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 0$ הוא הראשית עצמה. הוא מהווה נקודה בודדת במרחב.