<u>הקדמה</u>

בהינתן טור אינסופי $\sum a_n$ נשאלות שתי שאלות:

1) האם הטור מתכנס?
2) אם הוא מתכנס, מהו סכומו?

פרק זה עוסק בשאלה הראשונה, ובשורות הבאות נתמודד עימה באמצעות אנלוגיה לאינטגרל הלא אמיתי $\int_1^{\infty} f_{(x)}\,dx$.
גם השאלה השנייה חשובה כמובן, מסיבות מעשיות, ולכן נשוב אליה בהמשך.
אנו נדון כאן רק בטורים שאינם מכילים איברים שליליים. מדוע?
מפני שסדרת הסכומים החלקיים של טורים כאלה אינה יורדת, ואם היא גם חסומה מלעיל הרי היא לבטח מתכנסת.
כדי להוכיח שטור אשר אינו מכיל איברים שליליים מתכנס, מספיק רק להראות שהוא חסום מלעיל.

<u>סכומים חלקיים שאינם יורדים</u>

נניח שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ אינו מכיל איברים שליליים, היינו, $0 \le a_n$.

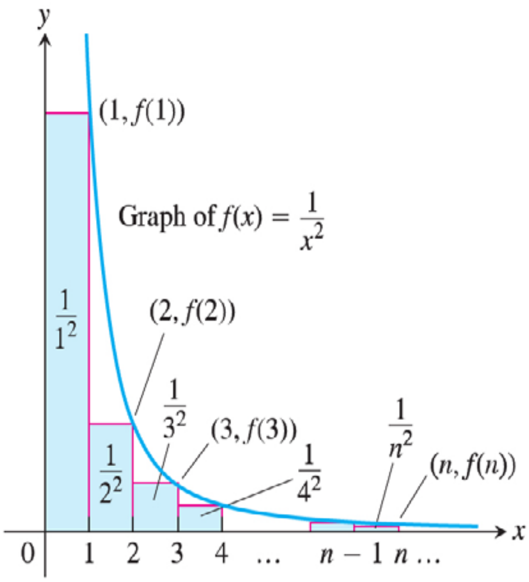
במצב זה, סכום חלקי (S_{n+1}) כלשהו של הטור חייב להיות גדול או שווה לקודמו (S_n), שהרי $S_{n+1} = S_n + a_n$.
נובע מכך שסדרת הסכומים החלקיים $\{S_n\}$ היא סדרה שאינה יורדת: $\{S_1 \le S_2 \le S_3 \le \cdots \le S_n \le S_{n+1} \le \cdots\}$.
ניזכר בתיאורמה 6 שבפרק "סדרות", האומרת כי סדרה אשר אינה יורדת מתכנסת אם ורק אם היא חסומה מלעיל,
וכפועל יוצא נאמר :

טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ שאיבריו **אינם שליליים**, מתכנס אם ורק אם סכומיו החלקיים חסומים מלעיל.

נשוב רגע לטור ההרמוני $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ אשר נדון בקצרה בפרק "טורים אינסופיים".
הוכחנו אז שטור זה מתבדר למרות שמתקיים בו $a_n \to 0$, שהינו תנאי הכרחי (אך לא מספיק) להתכנסות.
כעת אנו יכולים לומר כי איבריו של הטור ההרמוני אינם שליליים אומנם, אך **סכומיו החלקיים <u>אינם</u> חסומים מלעיל**.

<u>מבחן האינטגרל</u>

נתוודע למבחן האינטגרל באמצעות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, שהינו "קרוב משפחה" של הטור ההרמוני. האם טור זה מתכנס?
אנו קובעים זאת באמצעות השוואתו ל- $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$. אנו חושבים על אברי הטור כערכים של הפונקציה $f_{(x)} = \frac{1}{x^2}$,
ומפרשים ערכים אלה כשטחים של מלבנים תחת גרף הפונקציה.



קל לראות באיור כי סכום שטחיהם של n מלבנים תחת גרף הפונקציה
(ז"א הסכום החלקי ה- "n"י של הטור), קטן מהשטח הכולל שמתחת לגרף.

$$= \text{סכום שטחי המלבנים} = S_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

$$= f_{(1)} + f_{(2)} + f_{(3)} + \cdots + f_{(n)} < f_{(1)} + \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx <$$

$$< 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1 + 1 = 2$$

אם כך, סדרת הסכומים החלקיים של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ חסומה מלעיל ע"י 2.
לו היה זה החסם העליון **המינימאלי**, היה סכום הטור בידינו, אך אין זה כך.
בנסיבות אלה ניתן רק לומר שסכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ קטן מ- 2.

תיאורמה 9 : מבחן האינטגרל תהי $\{a_n\}$ סדרה שאיבריה חיוביים. נניח ש- $a_n = f_{(n)}$, כאשר $f_{(x)}$ היא פונקציה רציפה, חיובית ויורדת לכל $N \le x$. או אז, הטור $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ והאינטגרל $\int_N^{\infty} f_{(x)}\,dx$ מתכנסים שניהם או מתבדרים שניהם.

דוגמה מהספר (עמ' 774): טור – p

הראה שטור - p : $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^p}\right) = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$ מתכנס כאשר $1 < p$ ומתבדר כאשר $p \le 1$.

<u>פיתרון</u>: כאשר $1 < p$, $f_{(x)} = \frac{1}{x^p}$ היא פונקציה חיובית יורדת של x .

בפרק "אינטגרל לא אמיתי" הראינו שעבור $1 < p$, $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ מתכנס לערך $\frac{1}{p-1}$.

אם כך, הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^p}\right)$ מתכנס במבחן האינטגרל עבור $1 < p$ (איננו יודעים לאיזה ערך הוא מתכנס).

עוד הוכחנו אז, שכאשר $p < 1$, $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ מתבדר.

אם כך, במבחן האינטגרל מתבדר גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^p}\right)$ כאשר $p < 1$.

כאשר $p = 1$ מתקבל הטור ההרמוני (המתבדר) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$

$p = 1$ מהווה את "קו פרשת המים" של טור – p , ולכן אנו אומרים שהטור ההרמוני "מתבדר בקושי".

האיטיות שבה הוא שואף לאינסוף מרשימה ממש – נדרש סכום חלקי בן 180 מליון איברים כמעט, כדי לעבור את המספר 20 !

דוגמה נוספת מהספר – הראה שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}\right)$ מתכנס במבחן האינטגרל.

פיתרון: הפונקציה $f_{(x)} = \frac{1}{x^2+1}$ חיובית, רציפה ויורדת לכל $1 \le x$. כמו כן:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b\to\infty} [\mathrm{arctg}(x)]_1^b = \lim_{b\to\infty} [\mathrm{arctg}(b) - arctg(1)] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

האינטגרל $\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ מתכנס (ל- $\frac{\pi}{4}$) ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}\right)$ מתכנס (איננו יודעים לאיזה ערך).

למסקנה שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}\right)$ מתכנס אפשר להגיע גם בעזרת השוואתו לטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ שאף הוא מתכנס, אך על כך בפרק הבא...