## אינטגרציה של טור חזקות

נכיר כעת תיאורמה אשר לפיה כי ניתן לעשות אינטגרציה של טור חזקות, איבר אחר איבר, בכל נקודה שבאינטרוול ההתכנסות:

> תיאורמה 20: תיאורמת האינטגרציה של טורי חזקות
>
> אם $f_{(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-a)^n$ מתכנס באינטרוול $a-R < x < a+R$ ,
>
> אז גם $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$ מתכנס באינטרוול זה ,
>
> וכמו כן מתקיים $\int f_{(x)}dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C$ לכל $a-R < x < a+R$

דוגמאות (האיבר הכללי של הטורים רשום לפי אינדקס אשר מתחיל ב- $n=0$ ):

א. מצא את טור החזקות של הפונקציה $f_{(x)} = arctan(x)$

פיתרון: אנו יודעים ש- $f'_{(x)} = \frac{1}{1+x^2}$ , ושנגזרת זו היא סכומו של הטור ההנדסי (על פי הנוסחה $S_{n\to\infty} = \frac{a_1}{1-q}$) :

$$q = -x^2 \quad \Leftarrow \quad -1 < x < 1 \ , \quad \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \cdots + (-1)^n \cdot x^{2n} + \cdots$$

אם כך, נעשה אינטגרציה לאברי הטור, איבר אחר איבר, ונקבל את טור החזקות של $f_{(x)} = arctan(x)$ :

$$arctan(x) = \int \frac{1}{1+x^2}dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \quad , \quad -1 < x < 1$$

כאן $C = 0$ כי $arctan(0) = 0$ .

טור זה מתכנס ל- $arctan(x)$ גם כאשר $x = \pm 1$ , אך תיאורמה 20 אינה מבטיחה זאת ולכן לא רשמנו זאת כאן.

ב. מצא את טור החזקות של הפונקציה $f_{(x)} = ln|1+x|$

פיתרון: אנו יודעים ש- $f'_{(x)} = \frac{1}{1+x}$ , ושנגזרת זו היא סכומו של הטור ההנדסי (על פי הנוסחה $S_{n\to\infty} = \frac{a_1}{1-q}$) :

$$q = -x \quad \Leftarrow \quad -1 < x < 1 \ , \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots + (-1)^n \cdot x^n + \cdots$$

אם כך, נעשה אינטגרציה לאברי הטור, איבר אחר איבר, ונקבל את טור החזקות של $f_{(x)} = ln|1+x|$ :

$$ln|1+x| = \int \frac{1}{1+x}dx = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots \quad , \quad -1 < x < 1$$

גם כאן $C = 0$ , כי $ln(1+0) = 0$ .

טור זה מתכנס ל- $ln|1+x|$ גם כאשר $x = 1$ , אך תיאורמה 20 אינה מבטיחה זאת ולכן לא רשמנו זאת כאן.