התכנסות של טורי טיילור והערכות שגיאה

פרק זה עוסק בשתי השאלות אשר נוסחו בסוף הפרק הקודם:

1) עבור אילו ערכים של x מצופה מטור טיילור להתכנס לערכי הפונקציה אשר מגדירה אותו ?

2) באינטרוול נתון כלשהו, באיזו מידה מהווים פולינומי טיילור קירוב של הפונקציה ?

תיאורמת טיילור

שאלות אלה נענות ע"י תיאורמת טיילור אשר מתורגמת לנוסחה הבאה:

נוסחת טיילור

אם ל- f ישנן נגזרות מכל הסדרים באינטרוול פתוח $\mathbf{I}$ אשר מכיל את a , אז לכל n שלם וחיובי ולכל x שבאינטרוול $\mathbf{I}$,

$$f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\cdot(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n + R_n(x)$$

כאשר

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1}$$

c נקודה בין a לבין x

נוסחת טיילור אומרת בעצם שלכל $x \in \mathbf{I}$ מתקיים $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$.

הפונקציה $R_n(x)$ נקראת **השארית מסדר** n (או **איבר השגיאה** של הקירוב), ונקבעת ע"י ערך הנגזרת מסדר $n+1$ בנקודה מסוימת $\mathbf{c}$, אשר נמצאת איפשהו בין a לבין x . היכן בדיוק היא נמצאת קשה לחשב בד"כ, אך היא לבטח קיימת.

לכל n שנבחר, נוסחת טיילור תיתן את הקירוב הפולינומיאלי של f מסדר זה, וכן נוסחה לשגיאה המתקבלת בקירוב זה.

אם $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ לכל $x \in \mathbf{I}$, נאמר שטור טיילור של f ב- $x = a$ מתכנס ל- f באינטרוול $\mathbf{I}$, ונרשום:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\cdot(x-a)^k$$

דוגמה (עמוד 813 בספר): **הראה שטור מקלורן של $f_{(x)} = e^x$ מתכנס ל- $f_{(x)}$ עבור כל ערך של x** .

פיתרון: בפרק הקודם מצאנו את פולינום טיילור של $f_{(x)} = e^x$ ב- $x = 0$. ע"פ נוסחת טיילור נכתוב כעת :

$$e^x = P_n(x) + R_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}\cdot x^2 + \frac{1}{3!}\cdot x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}\cdot x^n + R_n(x)$$

אמרנו אז שהטור מתכנס ל- $f_{(x)}$ בכל נקודה באינטרוול $-\infty < x < \infty$ וכעת נוכיח זאת.

הנגזרת מסדר $n+1$ של פונקציה זו היא $f^{(n+1)}(x) = e^x$ ומכך נובע ש- $f^{(n+1)}(c) = e^c$.

נציב זאת בנוסחה ל- $R_n(x)$ ונקבל: $R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!}\cdot(x-0)^{n+1}$.

כעת נשאיף את n לאינסוף כדי לקבל את איבר השגיאה של הקירוב הפולינומיאלי הטוב ביותר שיש לפונקציה.

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot e^c = 0\cdot e^c = 0 \quad =>$$

אין כל שגיאה (שארית) בקירוב הפולינומיאלי $P_n(x)$ כשהוא מסדר אינסופי (ז"א הכי טוב שיש), כי אז $R_n(x) = 0$ **לכל** x .

אם כך, אנו רשאים לרשום $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\cdot x^k$ מבלי למצמץ.

לעיתים קרובות נוח להשתמש בווריאנט של הנוסחה ל- $R_n(x)$, כפי שמוצג בתיאורמה שלהלן :

> תיאורמה 23 : תיאורמת הערכת השארית
>
> אם קיים קבוע חיובי M כך שמתקיים $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \le M$ לכל t שבין x לבין a (כולל),
>
> אז איבר השגיאה $R_n(x)$ מקיים את אי השוויון : $|R_n(x)| \le M \cdot \frac{|(x-a|^{\,n+1}}{(n+1)!}$.

להלן מספר דוגמאות אשר בהן נעשה שימוש בתיאורמת הערכת השארית ובתיאורמת טיילור לבירור סוגיות של התכנסות, ולקביעת מידת הקירוב אשר מתקבלת מפולינום טיילור.

דוגמה מהספר (עמ' 814) :

הראה שטור מקלורן של $f_{(x)} = \sin x$ מתכנס ל- $f_{(x)}$ עבור כל ערך של x .

פיתרון: ראשית נמצא את טור מקלורן של $\sin x$

$$f(x) = \sin x \qquad f''(x) = -\sin x \qquad f^{(4)}(x) = \sin x \qquad f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x$$

$$f'(x) = \cos x \qquad f'''(x) = -\cos x \qquad f^{(5)}(x) = \cos x \qquad f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x$$

אם כך, הנגזרת מסדר זוגי של פונקציה זו היא $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x$, ומסדר אי-זוגי $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x$.

עבור $x = 0$ מתקבל $f^{(2k)}(0) = (-1)^k \sin 0 = 0$, $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \cos 0 = (-1)^k$.

הנוסחה לטור מקלורן היא :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \cdots$$

ולפיכך טור מקלורן של $f_{(x)} = \sin x$ הוא :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} = 0 + x - 0 - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + 0 \cdot x^4 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 - 0 \cdot x^6 - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} + \cdots$$

ע"פ נוסחת טיילור נכתוב כעת :

$$\sin x = P_{2k+1}(x) + R_{2k+1}(x) = x - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 - \frac{1}{7!} \cdot x^7 + \dots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} + R_{2k+1}(x)$$

כל הנגזרות של $f_{(x)} = \sin x$ אינן עולות על 1 בערכן המוחלט, ז"א $\left|f^{(2k+2)}(t)\right| \le 1$ לכל t שבין x לבין 0 (כולל) .

מתקיים לכן אי השוויון $|R_{2k+1}(x)| \le 1 \cdot \frac{|x-0|^{2k+2}}{(2k+2)!}$, ע"פ תיאורמת השארית שהוסברה קודם.

נשאיף את k לאינסוף כדי לראות אם השארית (השגיאה) מתאפסת: $\lim_{k\to\infty} R_{2k+1}(x) = 0 \implies \lim_{k\to\infty} \frac{|x|^{2k+2}}{(2k+2)!} = 0$.

אכן, השגיאה מתאפסת כאשר ישנם בטור אינסוף איברים, והיא עושה זאת **לכל ערך של** x . אם כך אנו רשאים לרשום :

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} = x - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 - \frac{1}{7!} \cdot x^7 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} + \cdots$$

דוגמה (עמוד 814 בספר): **הראה שטור מקלורן של** $f_{(x)} = \cos x$ **מתכנס ל-** $f_{(x)}$ **עבור כל ערך של** x .

פיתרון: בפרק הקודם מצאנו את פולינום טיילור של $f_{(x)} = \cos x$ ב- $x = 0$. ע"פ נוסחת טיילור נכתוב כעת :

$$\cos x = P_{2k}(x) + R_{2k}(x) = 1 - \frac{1}{2!}\cdot x^2 + \frac{1}{4!}\cdot x^4 - \frac{1}{6!}\cdot x^6 + \dots + \frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot x^{2k} + R_{2k}(x)$$

אמרנו אז שהטור מתכנס ל- $f_{(x)}$ בכל נקודה באינטרוול $-\infty < x < \infty$, וכעת נוכיח זאת.

כל הנגזרות של $f_{(x)} = \cos x$ אינן עולות על 1 בערכן המוחלט, ז"א $\left|f^{(2k+1)}(t)\right| \le 1$ לכל t שבין x לבין 0 (כולל) .

מתקיים לכן אי השוויון $R_{2k}(x) \le 1 \cdot \frac{|x-0|^{2k+1}}{(2k+1)!}$, ע"פ תיאורמת השארית שהוסברה קודם.

נשאיף את k לאינסוף כדי לראות אם השארית (השגיאה) מתאפסת: $\lim_{k\to\infty} R_{2k}(x) = 0 \quad \Leftarrow \quad \lim_{k\to\infty} \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} = 0$.

אכן, השגיאה מתאפסת כאשר ישנם בטור אינסוף איברים, והיא עושה זאת **לכל ערך של** x . אם כך, אנו רשאים לרשום :

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot x^{2k} = 1 - \frac{1}{2!}\cdot x^2 + \frac{1}{4!}\cdot x^4 - \frac{1}{6!}\cdot x^6 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot x^{2n} + \cdots$$

דוגמה (עמוד 814 בספר) למציאת טור טיילור באמצעות הצבה.

מצא את טור מקלורן של $f_{(x)} = \cos 2x$ **והראה שהוא מתכנס ל-** $f_{(x)}$ **עבור כל ערך של** x .

פיתרון: כדי לקבל את טור מקלורן של $\cos 2x$, נרשום פשוט $2x$ במקום x בטור מקלורן של $\cos x$:

$$\cos 2x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot (2x)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2^{2k}}{(2k)!}\cdot x^{2k} = 1 - \frac{2^2}{2!}\cdot x^2 + \frac{2^4}{4!}\cdot x^4 - \frac{2^6}{6!}\cdot x^6 + \cdots$$

אם הטור $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot x^{2k}$ מתכנס עבור $-\infty < x < \infty$ אז הוא מתכנס גם עבור $-\infty < 2x < \infty$.

דוגמה (עמוד 814 בספר) למציאת טור טיילור באמצעות הכפלה.

מצא את טור מקלורן של $f_{(x)} = x \cdot \sin x$ **והראה שהוא מתכנס ל-** $f_{(x)}$ **עבור כל ערך של** x .

פיתרון: כדי לקבל את טור מקלורן של $x \cdot \sin x$, נכפול את טור מקלורן של $\sin x$ ב- x :

$$x \cdot \sin x = x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot x^{2k+2} = x^2 - \frac{1}{3!}\cdot x^4 + \frac{1}{5!}\cdot x^6 - \frac{1}{7!}\cdot x^8 + \cdots$$

טור זה מתכנס לכל x כי הטור $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot x^{2k+1}$ מתכנס לכל x .

<u>הקשר שבין עיגול תוצאה לבין שגיאה</u>

הראנו קודם שטור מקלורן של $f_{(x)} = e^x$ מתכנס ל- $f_{(x)}$ עבור כל ערך של x , אך נשאלת השאלה בכמה איברים של הטור יש להשתמש כדי להתקרב ל- e^x במידה **נתונה** של דיוק. את התשובה לכך מספקת תיאורמת הערכת השארית.

דוגמה (עמוד 816 בספר): **חשב את e עם שגיאה של פחות ממיליונית.**

פיתרון: טור מקלורן של e^x הוא :

$$e^x = P_n(x)+R_n(x) = 1+x+\frac{1}{2!}\cdot x^2+\frac{1}{3!}\cdot x^3+\cdots+\frac{1}{n!}\cdot x^n+R_n(x)$$

נציב $x = 1$:

$$e^1 = P_n(1)+R_n(1) = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}+R_n(1)$$

$R_n(x)=\frac{e^c}{(n+1)!}\cdot(x-0)^{n+1}$ כאשר c נקודה בין **0** לבין x **<=** $R_n(1)=\frac{e^c}{(n+1)!}$ כאשר c נקודה בין **0** לבין 1 .

$$e^0<e^c<e^1 \quad => \quad 1<e^c<e \quad => \quad \frac{1}{(n+1)!}<\frac{e^c}{(n+1)!}<\frac{e}{(n+1)!} \quad => \quad \frac{1}{(n+1)!}<R_n(1)<\frac{e}{(n+1)!}$$

אנו מוצאים כי $\frac{e}{(9+1)!}<\frac{1}{10^6}$ אשר מבטיח $R_9(1)<\frac{1}{10^6}$, ומנגד אנו מוצאים כי $\frac{1}{10^6}<\frac{1}{(8+1)!}$ אשר שולל $R_8(1)<\frac{1}{10^6}$.
אם כך $9 \le n$ מניב שארית (שגיאה) קטנה ממיליונית, ז"א יש לסכום 10 איברים ראשונים של הטור לכל הפחות.

$$e^1 \approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!} = 2.718281526 \qquad e^1 = 2.718281828$$

דוגמה: **עבור אילו ערכים של x ניתן להחליף את $\sin x$ ב- $x-\frac{1}{3!}\cdot x^3$ מבלי שגודל השגיאה יעלה על $3\cdot 10^{-4}$?**

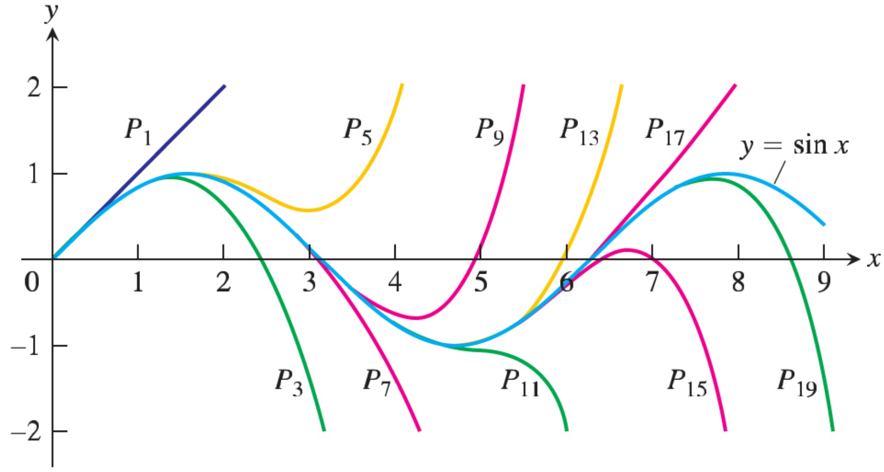
מאחר שטור מקלורן של $\sin x$ הינו **טור מתחלף** אשר מתכנס לכל x , נשתמש כאן ב"תיאורמת לייבניץ לטור מתחלף" האומרת כי השארית (השגיאה) קטנה בגודלה מאיברה הראשון (u_{n+1}), וכמו כן שסימנה של השארית זהה לסימנו של u_{n+1}.

$$\sin x = x-\frac{1}{3!}\cdot x^3+\frac{1}{5!}\cdot x^5-\frac{1}{7!}\cdot x^7+\cdots+\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot x^{2k+1}+\cdots$$

במקרה דנן איברה הראשון של השארית הינו $u_{n+1}=\frac{1}{5!}\cdot x^5$, כך שעלינו רק להבטיח כי מתקיים $\frac{1}{5!}\cdot|x|^5\le 3\cdot 10^{-4}$.

$$\frac{1}{5!}\cdot|x|^5\le 3\cdot 10^{-4} \quad => \quad |x|^5\le 5!\cdot 3\cdot 10^{-4} \quad => \quad |x|\le\sqrt[5]{360\cdot 10^{-4}}\approx 0.514$$

אם כך, כל x אשר קטן בגודלו מ- 0.514 יביא לכך ש- $\sin x\approx x-\frac{1}{3!}\cdot x^3$ בקירוב טוב מ- $3\cdot 10^{-4}$.
אנו יודעים גם שעבור $0<x$ מתקיים במקרה דנן $0<u_{n+1}$, כך שעבור $0<x$ השגיאה חיובית והקירוב הינו קירוב חסר.



פולינומי טיילור של $f_{(x)}=\sin x$

$$P_{2n+1}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot x^{2k+1}$$

מתכנסים ל- $\sin x$ כאשר $n\to\infty$.

שימו לב עד כמה מהווה $P_3(x)$ (ירוק) קירוב טוב לגרף של $\sin x$ עבור $x<1$.
עבור $x\le 0.514$ הקירוב טוב מ- $3\cdot 10^{-4}$

צירופים של טורי טיילור

בתחומי החפיפה של אינטרוולי התכנסותם, טורי טיילור ניתנים לחיבור, לחיסור ולהכפלה בקבוע. התוצאה תהייה טור טיילור.
טור טיילור של $f_{(x)}+g_{(x)}$ הינו סכומם של טורי טיילור של $f_{(x)}$ ושל $g_{(x)}$ משום ש- $(f+g)^{(n)}=f^{(n)}+g^{(n)}$, וכן הלאה.
לפיכך, אנו מקבלים את טור טיילור של $\frac{1+\cos 2x}{2}$ באמצעות הוספת 1 לטור טיילור של $\cos 2x$, וחילוק הטור המתקבל ב- 2 .
טור טיילור של $\sin x+\cos x$ מתקבל מחיבור איבריהם בהתאמה של טורי טיילור של $\sin x$ ושל $\cos x$.

זהות אוילר

כזכור, טור מקלורן של e^x מתכנס לכל x ולכן: $e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot x^k = 1+x+\frac{1}{2!}\cdot x^2+\frac{1}{3!}\cdot x^3+\ldots+\frac{1}{n!}\cdot x^n+\ldots$
זכור לנו גם שמספר מרוכב הינו מספר מהצורה $a+bi$ כאשר a ו- b הם מספרים ממשיים ואילו $i=\sqrt{-1}$.
אם נציב $x=i\theta$ (θ מספר ממשי) בטור מקלורן הנ"ל ונשתמש בקשרים $i^5=i$, $i^4=1$, $i^3=-i$, $i^2=-1$ וכולי כדי לפשט את התוצאה, נקבל:

$$e^{i\theta}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot(i\theta)^k=1+i\theta+\frac{1}{2!}\cdot i^2\theta^2+\frac{1}{3!}\cdot i^3\theta^3+\frac{1}{4!}\cdot i^4\theta^4+\frac{1}{5!}\cdot i^5\theta^5+\frac{1}{6!}\cdot i^6\theta^6+\cdots+\frac{1}{n!}\cdot i^n\cdot\theta^n+\ldots$$

$$e^{i\theta}=\left(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\frac{\theta^6}{6!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n!}\cdot\theta^{2n}+\ldots\right)+i\left(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\frac{\theta^7}{7!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\theta^{2n+1}+\cdots\right)$$

$$e^{i\theta}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k!}\cdot\theta^{2k}+i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot\theta^{2k+1}$$

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

אין זו הוכחה לכך ש- $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ מפני שלא הגדרנו עדיין מהי המשמעות של העלאת e בחזקה מדומה.
זוהי רק הגדרה ל- $e^{i\theta}$ כך שתהא תואמת למושגים שאותם אנו כבר מכירים.

> זהות אוילר :
>
> לכל מספר ממשי θ , $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

זהות אוילר מאפשרת לנו להגדיר e^{a+bi} כ- $e^a\cdot e^{bi}$ לכל מספר מרוכב $a+bi$.
תוצא חשוב של זהות אוילר היא המשוואה $e^{i\pi}=-1$.
כשהיא כתובה בצורה $e^{i\pi}+1=0$, משוואה זו משלבת חמישה מהקבועים החשובים ביותר במתמטיקה.