חשב את $\int_0^1 e^{-t^2}dt$ תוך שימוש בטור החזקות של e^{-x^2} בדיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה!

תשובה:

נמצא ראשית את טור מקלורן של $f_{(x)} = e^x$:

מאחר שהנגזרת מסדר n של פונקציה זו היא $f^{(n)}(x) = e^x$, מתקבל $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ ללא תלות בסדר הנגזרת .
הנוסחה לטור מקלורן היא :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \cdots$$

ולפיכך טור מקלורן של $f_{(x)} = e^x$ הוא :

$$f_{(x)} = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot x^k = 1 + x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot x^n + \cdots$$

כעת נציב $-x^2$ במקום x לקבלת טור מקלורן של $g_{(x)} = e^{-x^2}$:

$$g_{(x)} = e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot (-x^2)^k = 1 - x^2 + \frac{1}{2!} \cdot x^4 - \frac{1}{3!} \cdot x^6 + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^{2n} + \cdots$$

טור זה, אגב, מתכנס לפונקציה e^{-x^2} עבור כל ערך של x (ראה סיכום "התכנסות של טורי טיילור והערכת שגיאה").
האינטגרל של $g_{(x)} = e^{-x^2}$ הוא האינטגרל של הטור שקיבלנו:

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt = G_{(x)} - G_{(0)} = G_{(x)} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

$$\int_0^1 e^{-t^2}\,dt = G_{(1)} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{5} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{9} - \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{11} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{2n+1} + \cdots$$

נדרשנו לדייק כדי אלפית. על פי מבחן הטור המתחלף של לייבניץ, השארית (השגיאה) קטנה בגודלה מאיברה הראשון.
היכן בטור ממוקם האיבר **הראשון** אשר גודלו קטן מאלפית? זהו האיבר הראשון שמותר כי לא יוכנס לסכום.

$$\frac{1}{n!\,(2n+1)} < \frac{1}{1000} \quad \Rightarrow \quad 1000 < n!\,(2n+1)$$

מתקבל $n \geq 5$, כך שהאיבר **הראשון** אשר גודלו קטן מאלפית עומד ב- $n = 5$, ז"א במקום השישי (סופרים כאן מ- **0**).

$$\int_0^1 e^{-t^2}\,dt \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{5} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{9} = \frac{5651}{7560} \approx 0.747$$