גזירה של טור חזקות

נכיר כעת תיאורמה אשר לפיה כי ניתן לגזור טור חזקות, איבר אחר איבר, בכל נקודה שבאינטרוול ההתכנסות:

> תיאורמה 19: תיאורמת הגזירה של טורי חזקות
>
> אם טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-a)^n$ מתכנס באינטרוול $a-R < x < a+R$,
>
> אז הוא מגדיר פונקציה: $f_{(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-a)^n$ באינטרוול זה .
>
> בתוך האינטרוול (אינטרוול ההתכנסות) ישנן לפונקציה $f_{(x)}$ נגזרות מכל הסדרים.
>
> ניתן לחשב את הנגזרות באמצעות גזירה של הטור המקורי, איבר אחר איבר :
>
> $$f'_{(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot c_n \cdot (x-a)^{n-1} \quad , \quad a-R < x < a+R$$
>
> $$f''_{(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) \cdot c_n \cdot (x-a)^{n-2} \quad , \quad a-R < x < a+R$$
>
> וכן הלאה. כל טור שכזה מתכנס בכל נקודה שבאינטרוול ההתכנסות של הטור המקורי.

דוגמה לגזירה של טור חזקות, איבר אחר איבר (עמ' 800 בספר):

מצא את טור החזקות של הנגזרת הראשונה והנגזרת השנייה של הפונקציה $f_{(x)} = \frac{1}{1-x}$

פיתרון: אנו יודעים שעבור $-1 < x < 1$ מתקיים $f_{(x)} = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n + \cdots$

אם כך, $f'_{(x)} = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + n \cdot x^{n-1} + \cdots \quad , \quad -1 < x < 1$

וכמו כן, $f''_{(x)} = \frac{2}{(1-x)^3} = 2 + 6x + 12x^2 + \cdots + n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} + \cdots \quad , \quad -1 < x < 1$

אזהרה! גזירה איבר אחר איבר עלולה לא לפעול בטורים שאינם טורי חזקות.

למשל, הטור הטריגונומטרי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin(n! \cdot x)}{n^2}$ מתכנס לכל x , אך אם גוזרים אותו איבר אחר איבר מתקבל הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! cos(n! \cdot x)}{n^2}$ שהינו מתבדר לכל x . הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin(n! \cdot x)}{n^2}$ אינו טור חזקות, כי סכומיו החלקיים אינם פולינומים.