מבחני השוואה

ראינו כיצד נקבעת התכנסותם של טורים הנדסיים, טור – p ועוד כמה אחרים.
את התכנסותם של טורים רבים אחרים ניתן לבחון באמצעות השוואת איבריהם לאלה של טורים אשר התכנסותם ידועה.

תיאורמה 10 : מבחן ההשוואה יהא $\sum \boldsymbol{a_n}$ טור שאיבריו אינם שליליים. א) $\sum \boldsymbol{a_n}$ מתכנס אם קיים טור מתכנס $\sum \boldsymbol{c_n}$, כאשר $\boldsymbol{a_n \le c_n}$ לכל $\boldsymbol{N \le n}$ ב) $\sum \boldsymbol{a_n}$ מתבדר אם קיים טור מתבדר שאיבריו אינם שליליים $\sum \boldsymbol{d_n}$, כאשר $\boldsymbol{d_n \le a_n}$ לכל $\boldsymbol{N \le n}$

דוגמה מהספר (עמ' 777):

א) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n-1}$ **מתבדר** כי האיבר ה- "n"י שלו גדול מאיברו ה- "n"י של הטור ההרמוני [$\frac{1}{n}$] , שהינו טור מתבדר אשר איבריו אינם שליליים.

ב) הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$ **מתכנס** כי איבריו אינם שליליים וקטנים או שווים לאברים המתאימים של הטור $1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$, שהינו טור מתכנס כי הוא בנוי מ- 1 ועוד טור הנדסי מתכנס (ל- 2) .
אם כך, הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ חסום מלעיל ע"י 3 (אגב, החסם העליון **המינימאלי** שלו הוא e , ז"א הטור מתכנס ל- e).

ג) האם הטור $5 + \frac{2}{3} + \frac{1}{7} + 1 + \frac{1}{2+\sqrt{1}} + \frac{1}{4+\sqrt{2}} + \frac{1}{8+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{2^n+\sqrt{n}} + \cdots$ מתכנס?
נתעלם משלושת האיברים הראשונים, ונשווה את הנותרים עם הטור ההנדסי המתכנס $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
איברי טור זה $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n+\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{2+\sqrt{1}} + \frac{1}{4+\sqrt{2}} + \frac{1}{8+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{2^n+\sqrt{n}} + \cdots$ אינם שליליים והם קטנים/שווים לאברי הטור:
$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots$ שהינו טור הנדסי המתכנס ל- 2.
ללא שלושת איבריו הראשונים הטור הנתון מתכנס אם כך, כי הוא חסום מלעיל (ע"י 2), אז גם עימם הוא מתכנס (ראה סעיף "הוספה או מחיקה של איברים" בסוף הפרק "טורים אינסופיים").

מבחן הגבול

נכיר כעת מבחן השוואה שימושי במיוחד לטורים אשר איברם הכללי הוא מצורת מנה (ז"א פונקציה רציונאלית של $\boldsymbol{n}$).

> תיאורמה 11 : מבחן הגבול
>
> נניח ש- $0 \le a_n$ ו- $0 \le b_n$ לכל $N \le n$.
>
> 1) אם מתקיים $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C > 0$, אזי $\sum a_n$ ו- $\sum b_n$ מתכנסים שניהם או מתבדרים שניהם.
>
> 2) אם מתקיים $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, ו- $\sum b_n$ מתכנס, אזי $\sum a_n$ מתכנס.
>
> 3) אם מתקיים $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, ו- $\sum b_n$ מתבדר, אזי $\sum a_n$ מתבדר.

דוגמה מהספר (עמ' 779):

1) האם הטור $\cdots + \frac{2n+1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{9}{25} + \frac{7}{16} + \frac{5}{9} + \frac{3}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2}$ מתכנס?

פיתרון: ניקח $a_n = \frac{2n+1}{(n+1)^2}$. עבור ערכי n גדולים מאוד יתקבל בקירוב $a_n = \frac{2n}{(n)^2} = \frac{2}{n}$.

כעת ניקח $b_n = \frac{1}{n}$, משני טעמים:

א) זהו איבר כללי של טור מוכר - הטור ההרמוני הידוע כמתבדר.

ב) קל לראות שהמנה $\frac{a_n}{b_n}$ מניבה קבוע עבור ערכי n גדולים, כך שאנו מכוונים למקרה (1) של מבחן הגבול.

ובכן, ע"פ מבחן הגבול: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2} \cdot \frac{n}{1} = 2 > 0$, ומאחר ש- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)$ מתבדר, מתבדר גם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2}$

2) האם הטור $\cdots + \frac{1}{2^n-1} + \cdots + \frac{1}{15} + \frac{1}{7} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$ מתכנס?

פיתרון: ניקח $a_n = \frac{1}{2^n-1}$. עבור ערכי n גדולים מאוד יתקבל בקירוב $a_n = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

כעת ניקח $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, שוב מאותם שני טעמים:

א) זהו איבר כללי של טור מוכר - טור הנדסי מתכנס.

ב) קל לראות שהמנה $\frac{a_n}{b_n}$ מניבה קבוע עבור ערכי n גדולים, כך שאנו מכוונים שוב למקרה (1) של מבחן הגבול.

ובכן, ע"פ מבחן הגבול: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n-1} \cdot \frac{2^n}{1} = 1 > 0$, ומאחר ש- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ מתכנס, מתכנס גם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$.

3) האם הטור $\cdots + \frac{1+n\cdot\ln n}{n^2+5} + \cdots + \frac{1+4\ln 4}{21} + \frac{1+3\ln 3}{14} + \frac{1+2\ln 2}{9} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+n\cdot\ln n}{n^2+5}$ מתכנס?

פיתרון: ניקח $a_n = \frac{1+n\cdot\ln n}{n^2+5}$. עבור ערכי n גדולים מאוד יתקבל בקירוב $a_n = \frac{n\cdot\ln n}{n^2} = \frac{\ln n}{n}$.

כעת ניקח $b_n = \frac{1}{n}$, משני הטעמים הבאים:

א) זהו איבר כללי של טור מוכר - הטור ההרמוני הידוע כמתבדר.

ב) קל לראות שהמנה $\frac{a_n}{b_n}$ מניבה ∞ עבור ערכי n גדולים, כך שאנו מכוונים למקרה (3) של מבחן הגבול.

ע"פ מבחן הגבול: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+n\cdot\ln n}{n^2+5} \cdot \frac{n}{1} = \ln\infty = \infty$, ומאחר ש- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)$ מתבדר, מתבדר גם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n\cdot\ln n}{n^2+5}$

4) האם הטור $\cdots + \frac{\ln n}{n^{3/2}} + \cdots + \frac{\ln 4}{4^{3/2}} + \frac{\ln 3}{3^{3/2}} + \frac{\ln 2}{2^{3/2}} + 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{3/2}}$ מתכנס?

פיתרון: ניקח $a_n = \frac{\ln n}{n^{3/2}}$. כעת ניקח $b_n = \frac{1}{n^{5/4}}$, משני הטעמים הבאים:

א) זהו איבר כללי של טור p מתכנס. ב) הוא גדול מ- a_n: $\frac{\ln n}{n^{3/2}} < \frac{n^{1/4}}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{5/4}}$, כך שהתשובה ברורה כבר ע"פ תיאורמה 10...

ובכל זאת נמשיך: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{3/2}} \cdot \frac{n^{5/4}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{1/4}} = 0$, ומאחר ש- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/4}}$ מתכנס, מתכנס גם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{3/2}}$.