טורים מתחלפים, התכנסות מוחלטת ובתנאי

טור שאיבריו הם חיוביים ושליליים לחילופין נקרא טור מתחלף.

להלן שלוש דוגמאות:

1) $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots$ זהו טור הרמוני מתחלף, והוא מתכנס.

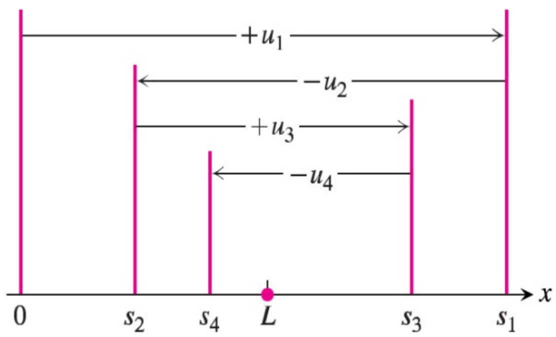
2) $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n\cdot 4}{2^n} = -2+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\cdots$ זהו טור הנדסי המתכנס ל- $\frac{a_1}{1-q}=\frac{-2}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=-\frac{4}{3}$

3) $\sum_1^\infty (-1)^{n+1}\cdot n = 1-2+3-4+5-6+\cdots+(-1)^{n+1}\cdot n+\cdots$ זהו טור מתבדר כי $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$

את התכנסותו של הטור ההרמוני המתחלף נוכיח בעזרת מבחן הטור המתחלף.

> תיאורמה 14 : מבחן הטור המתחלף (תיאורמת לייבניץ)
>
> הטור $\cdots + u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+(-1)^{n+1}\cdot u_n = \sum_1^\infty (-1)^{n+1}\cdot u_n$ מתכנס, אם מתקיימים 3 התנאים שלהלן:
>
> א) האיברים u_n חיוביים כולם.
>
> ב) $u_{n+1} \le u_n$ לכל $N \le n$
>
> ג) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

כעת אנו רואים שבטור ההרמוני המתחלף $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ מתקיימים כל שלושת התנאים הנ"ל (N=1), ולכן הוא מתכנס.



האיור שמשמאל ממחיש את תיאורמת לייבניץ :

כל איבר קטן מקודמו (בערך מוחלט) ומחליף סימן,

כך שהסכומים החלקיים מדלגים מצידו האחד של גבול ההתכנסות (L)

אל צידו השני תוך שהם "סוגרים עליו" בהדרגה.

לבסוף, כש- $n\to\infty$, $u_n\to 0$, ואז הדילוגים קטנים ל- 0 תוך שהסכום "מתייצב" על גבול ההתכנסות.

האיור משקף גם את תיאורמה 15 שלהלן :

> תיאורמה 15 : אומדן סכומו הכולל של טור מתחלף בהינתן הסכום החלקי ה- "n"י שלו.
>
> אם הטור $\sum_1^\infty (-1)^{n+1}\cdot u_n$ מקיים את שלושת התנאים שבתיאורמה 14, אז לכל $N\le n$ מתקיים:
>
> ההפרש (בערך מוחלט) שבין הסכום החלקי ה- "n"י : $S_n = u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+(-1)^{n+1}\cdot u_n$
>
> לבין סכום הטור L , קטן מ- u_{n+1} , ז"א קטן מהאיבר הבא שעדיין לא הוכנס לסכום.
>
> יתרה מכך, סימנו של ההפרש $L-S_n$ (השארית) זהה לסימן של המקדם של u_{n+1} .

דוגמה מהספר (עמ' 788) לבדיקתה של תיאורמה 15 על טור הנדסי מתכנס שסכומו ידוע:

$$\sum_0^\infty (-1)^n\cdot\frac{1}{2^n} = \underbrace{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\frac{1}{64}-\frac{1}{128}}_{S_8}+\frac{1}{256}-\cdots+(-1)^n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+\cdots = L$$

ע"פ תיאורמה 15, ההפרש $L-S_8$ הינו חיובי וקטן מ- $u_9=\frac{1}{256}$.

נבדוק זאת: $S_8 = \frac{1\cdot\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^8-1\right]}{-\frac{1}{2}-1} = \frac{85}{128}$, $L=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}$ <= $L-S_8=\frac{2}{3}-\frac{85}{128}=\frac{1}{384}<\frac{1}{256}$

אכן מתאים לתיאורמה...

התכנסות מוחלטת ובתנאי

> **הגדרה – התכנסות מוחלטת**
>
> הטור $\sum a_n$ מתכנס באופן מוחלט אם טור הערכים המוחלטים של איבריו $\sum|a_n|$ מתכנס.

הטור ההנדסי $\cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot (-1)^n + \cdots - \frac{1}{64} + \frac{1}{32} - \frac{1}{16} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2^n} \cdot (-1)^n \sum_0^\infty$ מתכנס באופן מוחלט בגלל שטור הערכים המוחלטים התואם $\cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots + \frac{1}{64} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2^n} \sum_0^\infty$ מתכנס.

הטור ההרמוני המתחלף $\cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_1^\infty$ אינו מתכנס באופן מוחלט בגלל שטור הערכים המוחלטים התואם $\cdots + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{n} \sum_1^\infty$ הוא הטור ההרמוני שהינו מתבדר.

> **הגדרה – התכנסות בתנאי**
>
> טור אשר מתכנס, אבל **לא** מתכנס באופן מוחלט, מתכנס בתנאי.

אם כך, הטור ההרמוני המתחלף מתכנס בתנאי.

התכנסות מוחלטת חשובה משתי סיבות :

1) בדיקת התכנסותם של טורים בעלי איברים חיוביים הינה קלה יחסית, כפי שהוסבר בתחילת הפרק "מבחן האינטגרל" .

2) אם טור מתכנס באופן מוחלט, אז הוא מתכנס. עובדה זו באה לביטוי בתיאורמה הבאה:

> תיאורמה 16 : מבחן ההתכנסות המוחלטת
>
> אם $\sum|a_n|$ מתכנס, אז גם $\sum a_n$ מתכנס.

כל טור אשר מתכנס באופן מוחלט מתכנס, אך ישנם טורים מתכנסים רבים שאינם מתכנסים באופן מוחלט.

דוגמה מהספר (עמ' 790): <u>שימוש במבחן ההתכנסות המוחלטת להוכחת התכנסותו של טור</u>.

א. נתון טור- p מתחלף $\cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + \cdots + \frac{1}{16} - \frac{1}{9} + \frac{1}{4} - 1 = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \sum_{n=1}^\infty$. טור הערכים המוחלטים התואם הוא הטור $\cdots + \left(\frac{1}{n^2}\right) + \cdots + \frac{1}{16} + \frac{1}{9} + \frac{1}{4} + 1 = \left(\frac{1}{n^2}\right) \sum_{n=1}^\infty$ שהינו טור- p מתכנס (כי $1 < p$) .

אם כך, הטור הנתון מתכנס כי הוא מתכנס באופן מוחלט.

ב. נתון הטור $\cdots + \frac{\sin n}{n^2} + \cdots + \frac{\sin 4}{16} + \frac{\sin 3}{9} + \frac{\sin 2}{4} + \frac{\sin 1}{1} = \frac{\sin n}{n^2} \sum_{n=1}^\infty$. טור הערכים המוחלטים התואם הוא הטור $\cdots + \frac{|\sin n|}{n^2} + \cdots + \frac{|\sin 4|}{16} + \frac{|\sin 3|}{9} + \frac{|\sin 2|}{4} + \frac{|\sin 1|}{1} = \left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \sum_{n=1}^\infty$ שהינו טור מתכנס.

(ניתן להוכיח זאת במבחן השוואה לטור- p המתכנס $\left(\frac{1}{n^2}\right) \sum_{n=1}^\infty$, שהרי $1 \geq |\sin n|$ לכל n).

אם כך, הטור הנתון מתכנס כי הוא מתכנס באופן מוחלט.

דוגמה מהספר (עמ' 790): <u>הוכחת התכנסותו של טור- p מתחלף עבור כל p חיובי</u>.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right) = \frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n^p} + \cdots$$

עבור כל $0 < p$ מתקיימים כל שלושת התנאים של תיאורמת לייבניץ להתכנסות (ראה תיאורמה 14 בתחילת פרק זה).

עבור $1 < p$ הטור מתכנס באופן מוחלט כי טור הערכים המוחלטים התואם $\left(\frac{1}{n^p}\right) \sum_{n=1}^\infty$ מתכנס.

אם כך, עבור $1 \geq p > 0$ הטור הנ"ל מתכנס **בתנאי**, ועבור $1 < p$ הוא מתכנס **באופן מוחלט**.

<u>שינוי סדר איבריו של טור</u>

> תיאורמה 17 : תיאורמת ה"סידור מחדש" של טורים מתכנסים **באופן מוחלט.**
>
> אם $\sum \boldsymbol{a_n}$ מתכנס באופן מוחלט, ו- $\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \dots, \boldsymbol{b_n}, \dots$ הוא סידור כלשהו של הסדרה $\{\boldsymbol{a_n}\}$,
> אזי $\sum \boldsymbol{b_n}$ מתכנס באופן מוחלט, וכמו כן $\sum \boldsymbol{a_n} = \sum \boldsymbol{b_n}$.

לרובנו נראה הדבר טריוויאלי, הרי ברור ששינוי סדר איבריו של טור לא ישנה את סכומו (אם קיים סכום כזה).
אבל אין זה כך בטורים אשר מתכנסים בתנאי, שינוי סדר האיברים שלהם יכול להניב סכומים שונים בתכלית !
הסבר מאלף על כך ניתן בספר (מהדורה 11) בעמודים 791-792.

להלן סיכום מבחני ההתכנסות/התבדרות לטורים שבהם דנו:

1. **מבחן האיבר ה- "$\boldsymbol{n}$"י** : אם לא מתקיים $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{0}$, הטור מתבדר.

2. **טור הנדסי** : $\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{a_1} \cdot \boldsymbol{q^{n-1}}$ מתכנס אם $|\mathbf{q}| < 1$, אחרת הוא מתבדר.

3. **טור – p** : $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^p}\right)$ מתכנס אם $\boldsymbol{1} < \boldsymbol{p}$, אחרת הוא מתבדר.

4. **טור שאיבריו אינם שליליים**: נסה את מבחן האינטגרל, מבחן המנה או מבחן השורש.
   נסה להשוות לטור מוכר בעזרת מבחן ההשוואה.

5. **טור שיש בו גם איברים שליליים**: האם $\sum|\boldsymbol{a_n}|$ מתכנס? אם כן, אז גם $\sum \boldsymbol{a_n}$ מתכנס.

6. **טור מתחלף**: $\sum \boldsymbol{a_n}$ מתכנס אם מתקיימים בו התנאים של מבחן הטור המתחלף (תיאורמת לייבניץ).