

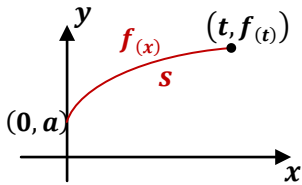
5. שימושי האינטגרל

$f(x)$  היא פונקציה עולה וחלקה לכל  $x \geq 0$ . נתון כי  $f(0) = a$ .

$S(x)$  מתארת את אורך העקומה של  $f$  בין הנקודות  $(0, a)$  ו-  $(x, f(x))$  עבור  $x > 0$ .

מצא את  $f(x)$  אם  $S(x) = Cx$  (C קבוע כלשהו). מהם הערכים האפשריים של C?

פיתרון:



$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx \quad \Rightarrow \quad S = \int_0^t \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Given:  $S = Ct \quad \Rightarrow \quad \int_0^t \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = Ct \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \int_0^t \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \frac{d}{dt} [Ct] \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + (f'(t))^2} = C \quad \Rightarrow \quad 1 + \left(\frac{df(t)}{dt}\right)^2 = C^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{df(t)}{dt} = \sqrt{C^2 - 1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow df(t) = \sqrt{C^2 - 1} \cdot dt \quad \Rightarrow \quad \int df(t) = \int \sqrt{C^2 - 1} \cdot dt \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t) = \sqrt{C^2 - 1} \cdot t + K$$

$$f(0) = a \quad \Rightarrow \quad (C^2 - 1) \cdot 0 + K = a \quad \Rightarrow \quad K = a$$

$$f(t) = \sqrt{C^2 - 1} \cdot t + a \quad \Rightarrow \quad f(x) = \sqrt{C^2 - 1} \cdot x + a, \quad C \leq -1 \text{ or } 1 \leq C$$

האפשרות  $C \leq -1$  נשללת כי נאמר ש-  $Cx$  הוא אורך קטע של גרף כאשר  $x$  חיובי, לכן  $C$  גם הוא חיובי.

נאמר גם כי  $f(x)$  היא פונקציה עולה, ואם  $C \neq 1$ , אחרת תהא אופקית. נותרנו לבסוף עם  $1 < C$ .