האם הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ מתכנס התכנסות מוחלטת?

יש לבחור תשובה אחת:

- a. לא ניתן לדעת
- b. מתכנס בתנאי
- c. מתבדר
- d. מתכנס התכנסות מוחלטת

אנו נשאלים בעצם אם $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$ מתכנס,

או בכתיב אחר, אם $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n^{n}}$ מתכנס.

<u>הרהורים</u> (לא תקפים כתשובה במבחן):

אנו יודעים ש- $\frac{1}{n}$ קטן לאט מדי ואומרים:

n גדל לאט מדי ועם זאת מהר יותר מ-

$\ln n^{n}$ (כי פולינום "מנצח" לוג), אז בטח ש-

$\ln n^{n}$ גדל לאט מדי ואם כך הטור מתבדר.

אוקי יופי, אז הטור המוחלט מתבדר.

והטור הנתון? מתכנס, כי הוא מתחלף ואיבריו שואפים לאפס (לייבניץ).

אם כך הוא מתכנס בתנאי.

הוכחה <u>פורמאלית</u> לכך שהטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$ מתבדר, באמצעות מבחן האינטגרל :

$$\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln x} \to \begin{cases} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \end{cases} \to \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{du}{u} = \lim_{b \to \infty} \int_{\ln 2}^{b} \frac{du}{u} = \lim_{b \to \infty} \ln|u| \Big|_{\ln 2}^{b} = \lim_{b \to \infty} \ln \left|\frac{b}{\ln 2}\right| = \infty$$

מצא את $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+(-1)^n}}$

תשובה:

$$\left\{\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^8} + \cdots + \frac{1}{2^{n+(-1)^n}} + \cdots\right\}$$

נפצל הטור הנתון לשני טורים הנדסיים, נחשב כ"א מהם לחוד, ואז נסכם.

לשם נוחיות נתמיד באינדקס אשר מתחיל ב- $n = 0$.

$$\left\{\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^9} + \cdots + \frac{1}{2^{2n+1}} + \cdots\right\} \qquad a_0 = \frac{1}{2} \quad , \quad q = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \quad => \quad S_{n \to \infty} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

$$\left\{\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} + \cdots + \frac{1}{2^{2n}} + \cdots\right\} \qquad a_0 = 1 \quad , \quad q = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \quad => \quad S_{n \to \infty} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

ערכו של הטור הנתון הוא אם כך:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+(-1)^n}} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2$$