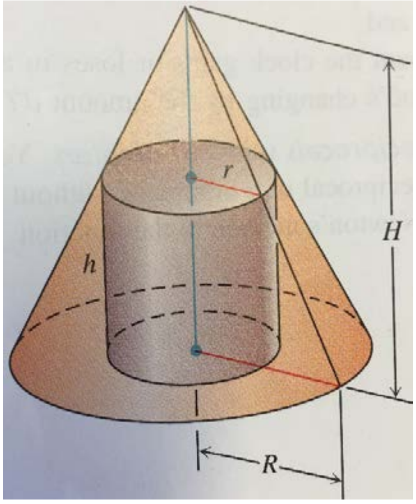


1. שימושי הנגזרת – בעיית קיצון עם תשובה משתנה

לעיתים, כמו בבעיה זו, התשובה תלויה בפרופורציות של הגופים המעורבים.

נניח כי גליל, שרדיוס r וגובהו h, חסום בתוך חרוט נתון, שרדיוס R וגובהו H (ראה ציור). מצא את הערך של r, במונחים של R ושל H, הדרוש כדי למקסם את שטח הפנים של הגליל.

תשובתך תהיה תלויה בקריטריון - האם $2R < H$ או $H \le 2R$.

פתרון:

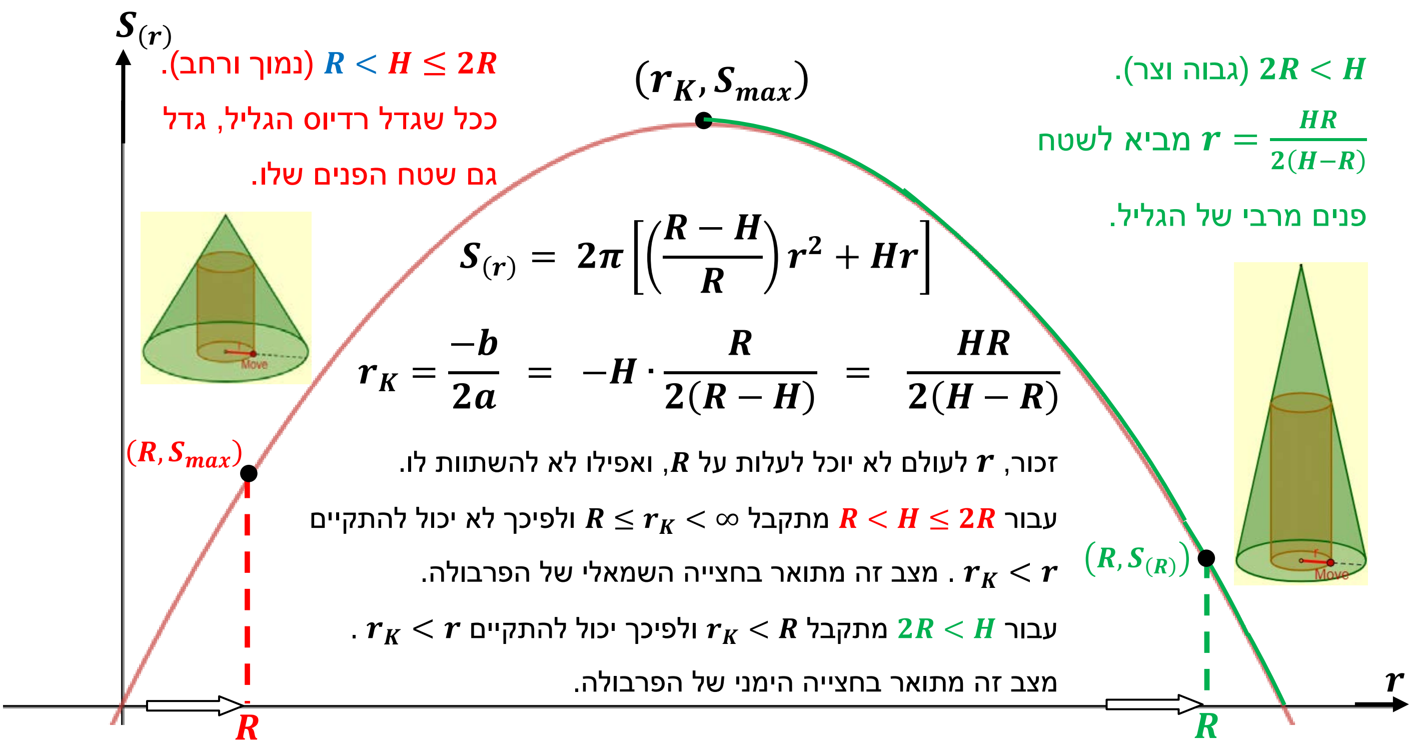
$$\frac{H-h}{r} = \frac{H}{R} \quad => \quad H-h = \frac{Hr}{R} \quad => \quad h = H\left(1-\frac{r}{R}\right)$$

$$S_{(r,h)} = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$S_{(r)} = 2\pi r^2 + 2\pi r H\left(1-\frac{r}{R}\right) = 2\pi r^2 + 2\pi H r - \frac{2\pi H}{R} r^2 = 2\pi\left[\left(\frac{R-H}{R}\right)r^2 + Hr\right] \to max$$

קיבלנו $S_{(r)}$ פונקציה פרבולית, עליה "לבכות" כדי שיתקבל בה מקסימום מקומי, ז"א צריך להתקיים $R < H$.

נמצא את r_K, רדיוס הגליל אשר בו מתקבל קודקוד הפרבולה ה"בוכה" ($S_{(r)}$ מרבי):



$$R \le r_K \quad => \quad R \le \frac{HR}{2(H-R)} \quad => \quad H \le 2R \qquad , \qquad r_K < R \quad => \quad \frac{HR}{2(H-R)} < R \quad => \quad 2R < H$$

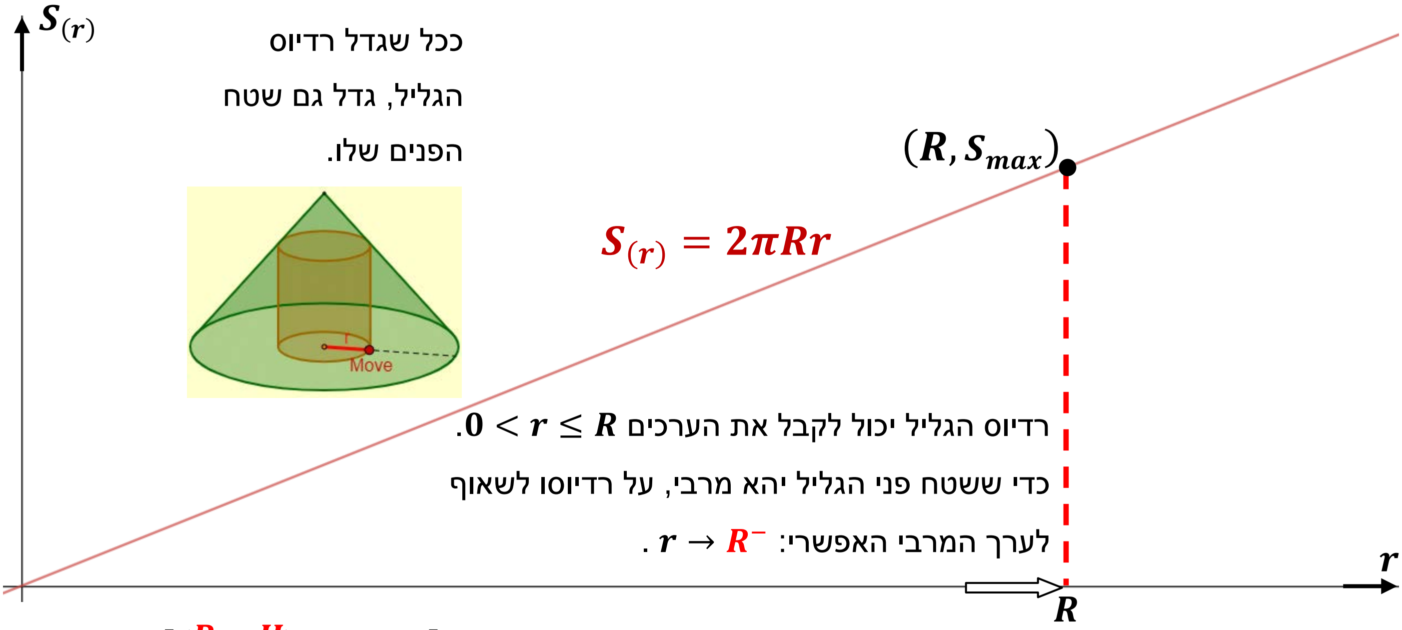
סיכומון: כאשר $R < H \le 2R$ תהא $S_{(r)}$ מרבית כאשר $r \to R^-$ (הערך המרבי ש- r יכול לקבל! שטח פני הגליל שווה אז לפעמיים שטח בסיסו, שכן גובהו שואף ל- 0). כאשר $2R < H$ תהא $S_{(r)}$ מרבית כאשר $r = \frac{HR}{2(H-R)}$.

עד כה דנו במקרים אשר כפופים לאילוץ $R < H$ (פרבולה "בוכה").

כאשר $H = R$, $S_{(r)}$ היא ישר עולה, וכאשר $H < R$ $S_{(r)}$ היא כבר פרבולה "מחייכת" (ראה בעמוד הבא).

כאשר $H = R$, $S_{(r)}$ היא ישר עולה:

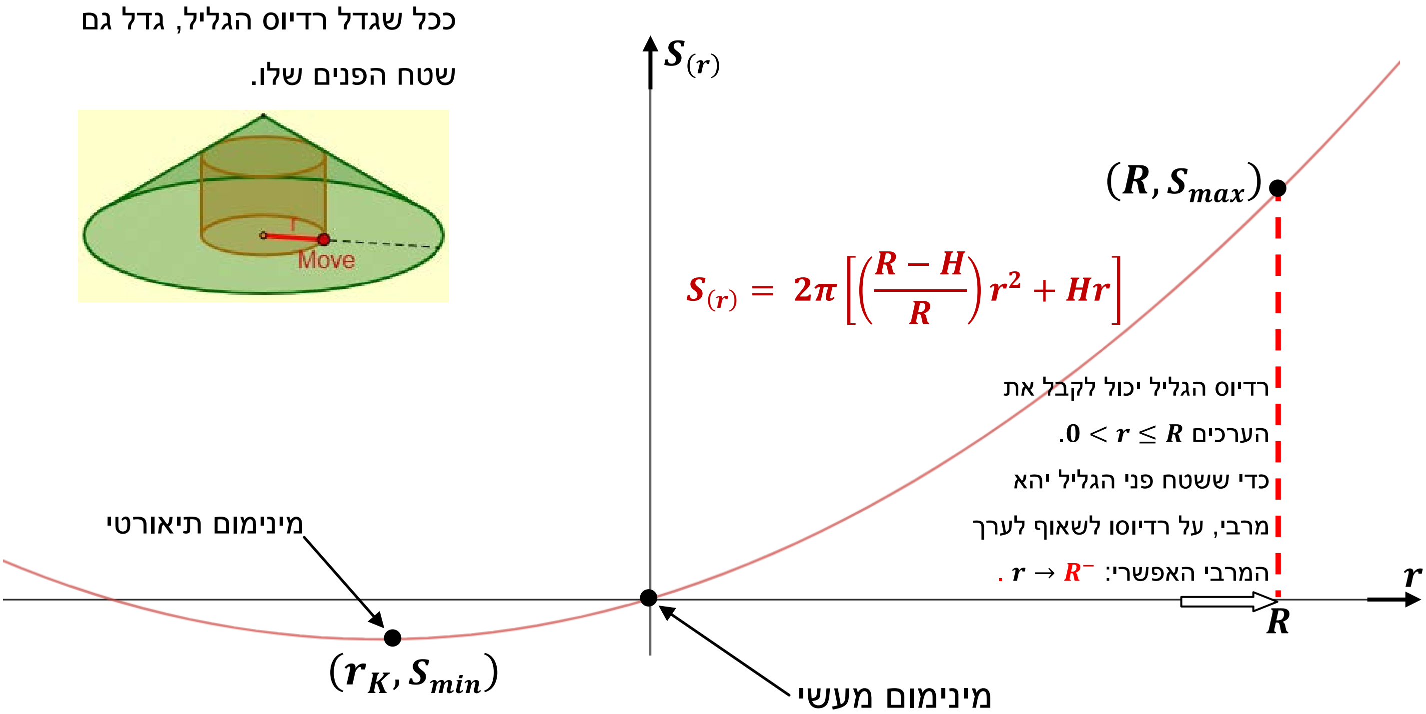
$H = R$ (גרוע).



$$S_{(r)} = 2\pi\left[\left(\frac{R-H}{R}\right)r^2 + Hr\right] = 2\pi[Hr] = 2\pi[Rr] \quad => \quad S_{max} = S_{(r\to R^-)} = 2\pi R^2$$

כאשר $H < R$, $S_{(r)}$ היא פרבולה "מחייכת" עם $r_K < 0$:

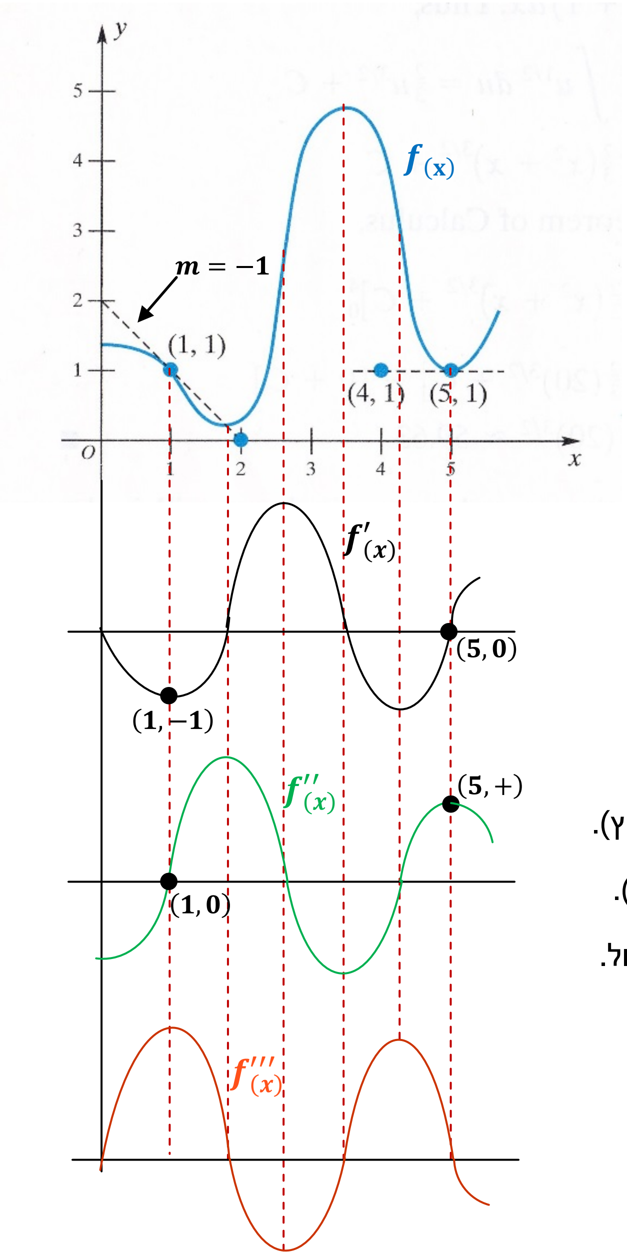
$H < R$ (ממש גרוע).



$$S_{(r)} = 2\pi\left[\left(\frac{R-H}{R}\right)r^2 + Hr\right] \quad => \quad S_{max} = S_{(r\to R^-)} = 2\pi\left[\left(\frac{R^- - H}{R^-}\right)(R^-)^2 + HR^-\right] = 2\pi R^2$$

סיכום סופי: הבעיה נחלקת לשני מקרים: 1) $0 < H \leq 2R$ שבו תהא $S_{(r)}$ מרבית כאשר $r \to R^-$ (הערך המרבי ש- r יכול לקבל). 2) $2R < H$ שבו תהא $S_{(r)}$ מרבית כאשר $r = \frac{HR}{2(H-R)}$.

2. **חקירת פונקציות תוך שימוש במשפט היסודי וביטוי לייבניץ ניוטון**



הציור מתאר את הפונקציה *f(x)* אשר לה נגזרות רציפות עד סדר שלישי. הקווים המרוסקים מתארים משיקים לפונקציה בנקודות (1,1) ו- (5,1).

בהתבסס על הציור, הסבר, אם ניתן, האם כל אחד מהאינטגרלים הבאים הוא חיובי, שלילי או אפס.

א. $\int_1^5 f(x)dx$ (5 נקו')

ב. $\int_1^5 f'(x)dx$ (5 נקו')

ג. $\int_1^5 f''(x)dx$ (7 נקו')

ד. $\int_1^5 f'''(x)dx$ (8 נקו')

פתרון:

א. חיובי, כי $f(x)$ חיובית בתחום האינטגרציה.

ב. אפס, כי $f_{(5)} - f_{(1)} = 1 - 1 = 0$ (ניוטון-לייבניץ).

ג. חיובי, כי $f'_{(5)} - f'_{(1)} = 0 - (-1) > 0$ (ניוטון-לייבניץ).

ד. חיובי, כי $f''_{(5)} - f''_{(1)} = (+) - 0 > 0$ (ניוטון-לייבניץ).

$0 < f''_{(5)}$ כי $f_{(x=5)}$ קעורה, $f''_{(1)} = 0$ כי $f_{(x=1)}$ פיתול.

שים לב כי רק הציור הכחול נתון, את האחרים הוספתי להבהרה, אין הכרח לציירם כדי לענות על סעיפי השאלה.

3. **המשפט היסודי, על זהויות היפרבוליות, סכום רימן.**

א. הנה כי F(x) היא האנטי נגזרת של $f(x)=\sqrt{1+x^4}$.

בטא את $\int_0^1\sqrt{1+x^4}dx$ במונחים של F מבלי לחשב את האינטגרל. הסבר בקצרה (5 נקו')

ב. הוכח כי $sinh(x+y)=sinhxcoshy+coshxsinhy$ (5 נקו')

ג. האם הטענה $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin\left(\frac{2i}{n}\right)\cdot\frac{2}{n}=\int_0^2 sinxdx$ נכונה או שגויה? הסבר (15 נקו')

פתרון א' - נוסחת ניוטון-לייבניץ:

$$F_{(x)}=\int f_{(x)}dx=\int\sqrt{1+x^4}dx \qquad => \qquad \int_0^1\sqrt{1+x^4}dx=F_{(x)}\Big|_0^1=F_{(1)}-F_{(0)}$$

פתרון ב' - הוכח כי $sinh(x+y)=sinhxcoshy+coshxsinhy$

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \quad , \quad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$L.H.S: \quad \sinh(x+y)=\frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}$$

$$R.H.S: \quad sinhxcoshy+coshxsinhy=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2}=$$

$$=\frac{e^{x+y}+e^{x-y}-e^{y-x}-e^{-(x+y)}}{4}+\frac{e^{x+y}-e^{x-y}+e^{y-x}-e^{-(x+y)}}{4}=\frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}$$

פתרון ג' - האם נכונה הטענה $lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}sin\left(\frac{2i}{n}\right)\cdot\frac{2}{n}=\int_0^2 sinxdx$?

כן, נכונה, כי הפעלת הגבול מצופפת אינסוף מלבנים תחת גרף הפונקציה $f=sin\,x$ בתחום $[0,2]$, תוך שרוחבו של כל מלבן שואף לאפס: $\Delta x=dx \quad => \quad \Delta x\to 0$.

$$L.H.S: \quad \sum_{i=1}^{n}sin\left(\frac{2i}{n}\right)\cdot\frac{2}{n}=\sum_{i=1}^{n}sin(i\cdot\Delta x)\cdot\Delta x=\sum_{i=1}^{n}sin(x_i)\cdot\Delta x$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}sin\left(\frac{2i}{n}\right)\cdot\frac{2}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}sin(x_i)\cdot\Delta x=\int_0^2 sinx\cdot dx \leftarrow R.H.S$$

4. אינטגרציה ע"י הצבה

חשב את $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x} dx$ באופן הבא: הצב $x = \frac{\pi}{2} - u$ ואת התוצאה החדשה הוסף לישנה.

תרגיל זה ממחיש כיצד הצבה מקורית יכולה לתרום תרומה כה חשובה לאינטגרל כה שימושי.

<u>פיתרון:</u>

$$x = \frac{\pi}{2} - u \quad => \quad \begin{cases} dx = -du \\ u = \frac{\pi}{2} - x \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} x = 0 & \rightarrow \quad u = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} & \rightarrow \quad u = 0 \end{cases}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx \quad = \quad -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin^n\left(\frac{\pi}{2} - u\right)}{\sin^n\left(\frac{\pi}{2} - u\right) + \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - u\right)} du \quad =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n u}{\cos^n u + \sin^n u} du$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n t}{\sin^n t + \cos^n t} dt \quad = \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n t}{\cos^n t + \sin^n t} dt$$

$$I + I \quad = \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n t}{\sin^n t + \cos^n t} dt \quad + \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n t}{\cos^n t + \sin^n t} dt$$

$$2I \quad = \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sin^n t}{\sin^n t + \cos^n t} + \frac{\cos^n t}{\cos^n t + \sin^n t}\right] dt \quad = \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n t + \cos^n t}{\sin^n t + \cos^n t} dt \quad = \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt$$

$$I \quad = \quad \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \quad = \quad \frac{1}{2}\left[t\right|_0^{\frac{\pi}{2}} \quad = \quad \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] \quad = \quad \frac{\pi}{4}$$

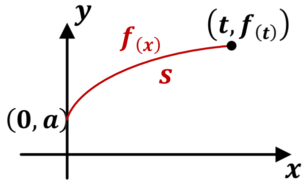
5. שימושי האינטגרל

$f_{(x)}$ היא פונקציה עולה וחלקה לכל $x \ge 0$. נתון כי $f_{(0)} = a$.

$S_{(x)}$ מתארת את אורך העקומה של f בין הנקודות $(0,a)$ ו- $\left(x, f_{(x)}\right)$ עבור $x > 0$.

מצא את $f_{(x)}$ אם $S_{(x)} = Cx$ (C קבוע כלשהו). מהם הערכים האפשריים של C?

פיתרון:



$$S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(y'_{(x)}\right)^2}\,dx \quad => \quad S = \int_0^t \sqrt{1 + \left(f'_{(x)}\right)^2}\,dx$$

$$Given: S = Ct \quad => \quad \int_0^t \sqrt{1 + \left(f'_{(x)}\right)^2}\,dx = Ct \quad =>$$

$$=> \quad \frac{d}{dt}\int_0^t \sqrt{1 + \left(f'_{(x)}\right)^2}\,dx = \frac{d}{dt}[Ct] \quad =>$$

$$=> \quad \sqrt{1 + \left(f'_{(t)}\right)^2} = C \quad => \quad 1 + \left(\frac{df_{(t)}}{dt}\right)^2 = C^2 \quad => \quad \frac{df_{(t)}}{dt} = \sqrt{C^2 - 1} \quad =>$$

$$=> \quad df_{(t)} = \sqrt{C^2 - 1} \cdot dt \quad => \quad \int df_{(t)} = \int \sqrt{C^2 - 1} \cdot dt \quad =>$$

$$=> f_{(t)} = \sqrt{C^2 - 1} \cdot t + K$$

$$f_{(0)} = a \quad => \quad (C^2 - 1) \cdot 0 + K = a \quad => \quad K = a$$

$$f_{(t)} = \sqrt{C^2 - 1} \cdot t + a \quad => \quad f_{(x)} = \sqrt{C^2 - 1} \cdot x + a \quad , \quad C \le -1 \;\; or \;\; 1 \le C$$

האפשרות $C \le -1$ נשללת כי נאמר ש- Cx הוא אורך קטע של גרף כאשר x חיובי, לכן C גם הוא חיובי.

נאמר גם כי $f_{(x)}$ היא פונקציה עולה, ואם כך $C \ne 1$, אחרת תהא אופקית. נותרן לבסוף עם $1 < C$.