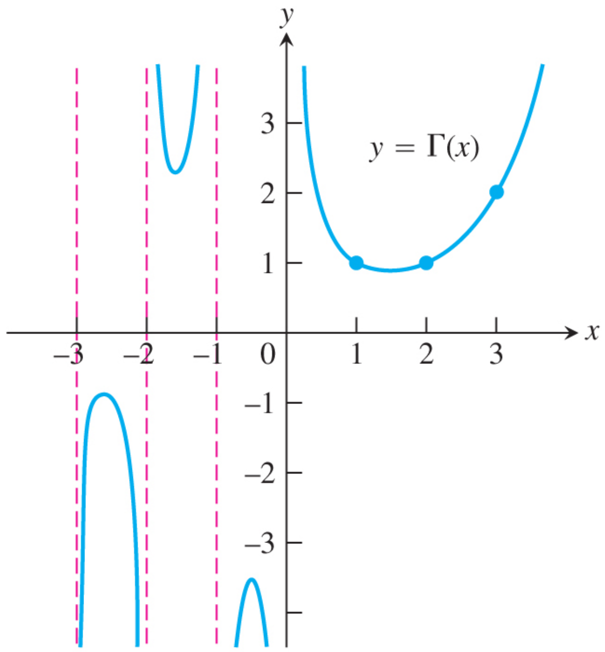
פונקצית גאמה

פונקצית גאמה של אוילר $\Gamma_{(x)}$ עושה שימוש באינטגרל, ע"מ להרחיב את פונקצית העצרת מערכים שלמים לא שליליים לערכים ממשיים אחרים. הנוסחה היא:

$$\Gamma_{(x)} = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \quad , \quad 0 < x$$

לכל x חיובי, המספר $\Gamma_{(x)}$ הוא האינטגרל של $t^{x-1}e^{-t}$ לפי t מ- 0 ל- ∞.
בתמונה מוצג הגרף של Γ בקרבת הראשית.



פונקצית גאמה של אוילר $\Gamma_{(x)}$ היא פונקציה רציפה של x .

עבור כל שלם חיובי $n+1$, ערכה של הפונקציה הוא $n!$.

$$\Gamma_{(n+1)} = n!$$

נוסחת האינטגרל אשר מגדירה את Γ תקפה רק עבור $0 < x$, אך ניתן להרחיבה לערכים שליליים **לא שלמים** של x ע"י הנוסחה

$$\Gamma_{(x)} = \frac{\Gamma_{(x+1)}}{x}$$

בתרגיל הבא נפתח נוסחה זו

תרגיל מהספר (עמ' 640) : אם n הוא שלם לא שלילי, $\Gamma_{(n+1)} = n!$

א. הראה ש- $\Gamma_{(1)} = 1$

$$\Gamma_{(x)} = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \quad , \quad 0 < x \quad =>$$

$$=> \quad \Gamma_{(1)} = \int_0^{\infty} t^{1-1}e^{-t}dt = \int_0^{\infty} e^{-t}dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-t}dt = -\lim_{b\to\infty} e^{-t}\Big|_0^b =$$

$$= -\lim_{b\to\infty}\left(e^{-b}-1\right) = -(0-1) = 1$$

ב. כעת פתור את האינטגרל של $\Gamma_{(x+1)}$ (אינטגרציה בחלקים) כדי להראות ש- $\Gamma_{(x+1)} = x\Gamma_{(x)}$

$$\Gamma_{(x)} = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \ , \quad 0 < x \qquad =>$$

$$\Gamma_{(x+1)} = \int_0^\infty t^{x}e^{-t}dt \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} u_{(t)} = t^x & => \quad du = x \cdot t^{x-1}dt \\ dv_{(t)} = e^{-t}dt & => \quad v_{(t)} = -e^{-t} \end{cases}$$

$$\int u \cdot dv \quad = \quad u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\int t^x \cdot e^{-t}dt \quad = \quad -t^x \cdot e^{-t} + \int e^{-t} \cdot x \cdot t^{x-1}dt \quad = \quad -t^x \cdot e^{-t} + x\int e^{-t} \cdot t^{x-1}dt$$

$$\Gamma_{(x+1)} = \int_0^\infty t^x e^{-t}dt \quad = \quad \lim_{b\to\infty}\int_0^b t^x e^{-t}dt \quad = \quad \lim_{b\to\infty}\left[-t^x \cdot e^{-t}\Big|_0^b + x\int_0^b e^{-t} \cdot t^{x-1}dt\right] \quad =$$

$$= \quad \lim_{b\to\infty}\left[-b^x \cdot e^{-b} - 0 + x\int_0^b e^{-t} \cdot t^{x-1}dt\right] \quad = \quad 0 - 0 + x\int_0^b e^{-t} \cdot t^{x-1}dt \quad = \quad x\Gamma_{(x)}$$

הראנו ש- $\Gamma_{(x+1)} = x\Gamma_{(x)}$, ומשתמע מכך ש-

$$\Gamma_{(2)} = 1\Gamma_{(1)} = 1 \cdot (1)$$

$$\Gamma_{(3)} = 2\Gamma_{(2)} = 2 \cdot (1)$$

$$\Gamma_{(4)} = 3\Gamma_{(3)} = 3 \cdot (2 \cdot 1)$$

$$\Gamma_{(5)} = 4\Gamma_{(4)} = 4 \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1)$$

$$\Gamma_{(6)} = 5\Gamma_{(5)} = 5 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)$$

.

.

.

$$\Gamma_{(n)} = (n-1)\Gamma_{(n-1)} = (n-1)!$$

$$\Gamma_{(n+1)} = n\Gamma_{(n)} = n(n-1)! = n!$$

נוסחת סטירלינג

המתמטיקאי הסקוטי ג'יימס סטירלינג (1692-1770) הראה ש- $\boldsymbol{lim_{x\to\infty}\left(\frac{e}{x}\right)^{x}\cdot\sqrt{\frac{x}{2\pi}}\cdot\Gamma_{(x)}=1}$.

מכך נובע שעבור ערכים גדולים מאוד של x מתקיים $\boldsymbol{\Gamma_{(x)}=\left(\frac{x}{e}\right)^{x}\cdot\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\cdot(1+\epsilon)}$, $\boldsymbol{\epsilon\to 0}$ כאשר $\boldsymbol{x\to\infty}$

נזניח את ϵ ונקבל את הקירוב $\boldsymbol{\Gamma_{(x)}\approx\left(\frac{x}{e}\right)^{x}\cdot\sqrt{\frac{2\pi}{x}}}$ (נוסחת סטירלינג).

תרגיל מהספר (עמ' 640) : קירוב סטירלינג ל- $\boldsymbol{n!}$

א.

השתמש בנוסחת סטירלינג ובעובדה ש- $\boldsymbol{n\Gamma_{(n)}=n!}$ כדי להראות ש- $\mathbf{n!\approx\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\cdot\sqrt{2n\pi}}$ (קירוב סטירלינג)

פיתרון :

$$\boldsymbol{n\Gamma_{(n)}\approx n\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\cdot\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\quad=>\quad n!\approx n\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\cdot\sqrt{\frac{2\pi}{n}}=\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\cdot\sqrt{2n\pi}}$$

קירוב סטירלינג מוביל לקירוב חשוב אחר : $\boldsymbol{\sqrt[n]{n!}\approx\frac{n}{e}}$

ב.

השווה בין תוצאות המחשבון ל- $\boldsymbol{n!}$ לבין אלה המתקבלות מקירוב סטירלינג, עבור $\boldsymbol{n=10,20,30,\ldots}$.

ג.

ליטוש של הנוסחה

$$\boldsymbol{\Gamma_{(x)}=\left(\frac{x}{e}\right)^{x}\cdot\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\cdot(1+\epsilon)}$$

מניב

$$\boldsymbol{\Gamma_{(x)}=\left(\frac{x}{e}\right)^{x}\cdot\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\cdot e^{1/12x}\cdot(1+\epsilon)}$$

או

$$\boldsymbol{\Gamma_{(x)}\approx\left(\frac{x}{e}\right)^{x}\cdot\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\cdot e^{1/12x}}$$

אשר אומר לנו ש-

$$\boldsymbol{n!\approx\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\cdot\sqrt{2n\pi}\cdot e^{1/12n}}$$