מהו גבול הסדרה $a_n=\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{3}{n}}$?

$$a_n=\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{3}{n}} \quad => \quad \lim_{n\to\infty} a_n = [0^0] \qquad\qquad a_n\left\{2^3,\quad 1^{3/2},\quad \left(\frac{2}{3}\right)^1,\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{3/4},\quad \left(\frac{2}{5}\right)^{3/5},\dots\right\}$$

החזקה שואפת לאפס כך שלכאורה $a_n\to 1$, אבל גם הבסיס שואף לאפס ומונע קביעה נחרצת. אין מנוס מלהעמיק:

$$b_n=ln(a_n) = ln\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{3}{n}} = \frac{3}{n}\cdot ln\left(\frac{2}{n}\right) \qquad b_n\left\{3ln2,\quad \frac{3}{2}ln1,\quad ln\frac{2}{3},\quad \frac{3}{4}ln\frac{1}{2},\quad \frac{3}{5}ln\frac{2}{5},\dots\right\}$$

כל איבר בסדרה $\{b_n\}$ הוא ה"לן" של האיבר המתאים בסדרה המקורית $\{a_n\}$.

מהו הגבול של "סדרת הלנים" $\{b_n\}$?

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{n}\cdot ln\left(\frac{2}{n}\right)\right] = 3\lim_{n\to\infty}\frac{ln\left(\frac{2}{n}\right)}{n} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] \to Lopital \to 3\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{-2}{n^2}\right)}{1} =$$

$$= -3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = -3\cdot 0 = 0^-$$

ובכן, הגבול של "סדרת הלנים" $\{b_n\}$ הוא 0^-:

$$b_n\left\{3ln2,\quad \frac{3}{2}ln1,\quad ln\frac{2}{3},\quad \frac{3}{4}ln\frac{1}{2},\quad \frac{3}{5}ln\frac{2}{5},\quad \dots,\quad 0^-,\quad 0^-,\quad 0^-\dots\right\}$$

מאחר וכל איבר בסדרה $\{b_n\}$ הוא ה"לן" של האיבר המתאים בסדרה המקורית $\{a_n\}$, מתקיים:

$$b_n = ln(a_n) \quad => \quad a_n = e^{b_n}$$

$$a_n\left\{2^3,\quad 1^{3/2},\quad \left(\frac{2}{3}\right)^1,\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{3/4},\quad \left(\frac{2}{5}\right)^{3/5},\quad \dots,\quad (0^+)^{0^+},\quad (0^+)^{0^+},\quad (0^+)^{0^+}\right\}$$

$$a_n\left\{e^{3ln2},\quad e^{\frac{3}{2}ln1},\quad e^{ln\frac{2}{3}},\quad e^{\frac{3}{4}ln\frac{1}{2}},\quad e^{\frac{3}{5}ln\frac{2}{5}},\quad \dots,\quad e^{0^-},\quad e^{0^-},\quad e^{0^-}\right\}$$

אנו רואים כי אברי הסדרה a_n שואפים ל- 1 $(a_n\to 1)$, ואם כך זהו גבול הסדרה, כפי שחשדנו מראש.

$$a_n = e^{b_n} \quad => \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} e^{b_n} = e^{\lim_{n\to\infty} b_n} = e^0 = 1$$