טורים אינסופיים

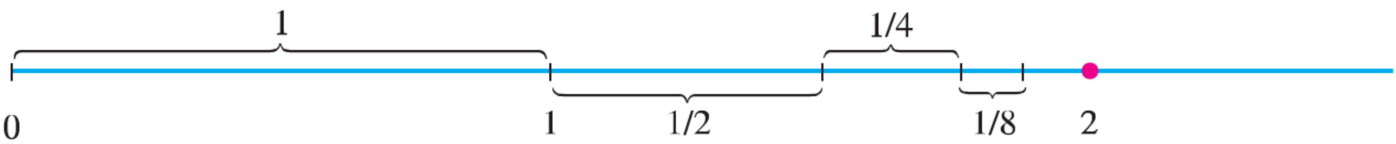
טור אינסופי הינו סכומה של סדרה אינסופית של מספרים: $\boldsymbol{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n+a_{n+1}+\cdots}$
מטרתו של פרק זה היא הקניית הבנה של משמעות הטור האינסופי, ופיתוח שיטות לחישובו.
בטור אינסופי ישנם אינסוף איברים, ולכן אל לנו לצפות שמצירופם זה לזה יושג מתישהו ערכו האמיתי של הטור.
במקום זאת, אנו בודקים מהו סכומם של n האיברים הראשונים שבטור, ואז עוצרים.
סכומם של n האיברים הראשונים, $\boldsymbol{S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n}$, הינו סכום סופי אשר ניתן לחשבו "כרגיל".
סכום זה נקרא "הסכום החלקי ה- nי", וככל שגדול יותר $\boldsymbol{n}$ אנו מצפים לדמיון רב יותר בין הסכום החלקי לבין הטור האינסופי.
ניקח למשל את הטור האינסופי: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\cdots$. זהו טור הנדסי אינסופי אשר מנתו היא $\boldsymbol{q=\frac{1}{2}}$.

טור הנדסי אינסופי **אשר מנתו קטנה בערכה המוחלט מ- 1** , מתכנס לערך סופי **למרות** שמדובר בסכום של אינסוף איברים.
הנוסחה לסכומו של טור כזה היא $\boldsymbol{S_{n\to\infty}=\frac{a_1}{1-q}}$, כך שסכומו של הטור האינסופי דנן הוא $\boldsymbol{S_{n\to\infty}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2}$.

נעמיד פנים שאיננו יודעים זאת, ונשתמש בנוסחה (המוכרת) לסכום החלקי ה- "n"י של טור הנדסי: (q≠1) , $\boldsymbol{S_n=\frac{a_1\cdot(q^n-1)}{q-1}}$

הנוסחה לסכום החלקי ה- "n"י בטור דנן היא לפיכך: $\boldsymbol{S_n=\frac{a_1\cdot(q^n-1)}{q-1}=\frac{1\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\right]}{\frac{1}{2}-1}} \;=>\; \boldsymbol{S_n=2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}$

ע"פ נוסחה זו, הסכום החלקי השני הינו $\boldsymbol{S_2=2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]}=\frac{12}{8}$, קרוב ל- 2 אבל לא מי יודע מה.
הסכום החלקי השלישי הינו $\boldsymbol{S_3=2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]}=\frac{14}{8}$, קרוב עוד יותר ל- 2 .
הסכום החלקי הרביעי הינו $\boldsymbol{S_4=2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]}=\frac{15}{8}$
ככל שיכיל הסכום החלקי יותר איברים, הוא יתקרב יותר בערכו ל- 2.
אנו אומרים שסכומו החלקי של הטור מתכנס ל- 2 מפני ש- $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]=2}$
סכומו של הטור האינסופי $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\cdots$ הינו 2, **בגלל שסכומו החלקי מתכנס ל- 2.**



באיור ניתן לראות שהסכום החלקי של ארבעת האיברים הראשונים ($\boldsymbol{S_4=1\frac{7}{8}}$) מהווה את חלק הארי של הטור כולו.
אינסוף האיברים שמ- $\boldsymbol{a_5}$ ואילך מצטרפים יחדיו לכדי $\boldsymbol{\frac{1}{8}}$ אחת בלבד! די מדהים כשעוצרים לחשוב על זה לרגע.

<u>הגדרות:</u>

בהינתן סדרה של מספרים $\{\boldsymbol{a_n}\}$, הביטוי $\boldsymbol{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n+a_{n+1}+\cdots}$ הינו טור אינסופי.
המספר $\boldsymbol{a_n}$ הוא האיבר ה- "n"י בטור.
סדרת הסכומים החלקיים של הטור מוגדרת כך :
$\{\boldsymbol{S_n}\}=\{\boldsymbol{S_1},\boldsymbol{S_2},\boldsymbol{S_3},\ldots,\boldsymbol{S_n},\ldots\}=\{\boldsymbol{a_1}\;,\;\boldsymbol{a_1+a_2}\;,\;\boldsymbol{a_1+a_2+a_3}\;,\;\ldots\;,\;\boldsymbol{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}\;,\ldots\}$
ואם היא מתכנסת לגבול L נאמר שהטור מתכנס ושסכומו L. המספר $\boldsymbol{S_n}$ שבסדרה זו הוא הסכום החלקי ה- "n"י .
במקרה זה אפשר גם לכתוב: $\boldsymbol{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n+a_{n+1}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=L}$
אם סדרת הסכומים החלקיים של הטור אינה מתכנסת, נאמר שהטור מתבדר.

בין אם טור מתכנס ובין אם לאו, נוח להשתמש ב"סיגמה" לשם כתיבתו: $\boldsymbol{\sum_{k=1}^{\infty}a_k}$, $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty}a_n}$, או פשוט $\boldsymbol{\sum a_n}$ כשברור שמדובר בסכימה מ- 1 עד אינסוף.

טורים הנדסיים (גיאומטריים)

הטור ההנדסי הוזכר קודם בקצרה וכעת יורחב עליו הדיון.

טורים הנדסיים הם מהצורה $a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1} + \cdots$

לשם הקומפקטיות אפשר להחליף את צורת הכתיבה ולהשתמש ב"סיגמה": $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}$ (כך גם ברור שהטור אינסופי).

אפשר גם לעשות "הזזת אינדקס" ולרשום: $\sum_{n=0}^{\infty} a_1 \cdot q^n$ (אבל אז יש לזכור ש- n אינו מייצג את מקומו של האיבר בטור).

בטור הנדסי, היחס בין איברים סמוכים הינו קבוע ומכונה "מנת הסדרה": $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$

q יכול להיות חיובי כמו בטור שלהלן: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots$

או שלילי כמו בטור שלהלן: $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \cdots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \cdots$

אם $q = 1$ מתקבל הטור: $a_1 + a_1 + a_1 + \cdots + a_1 + \cdots$, ואז הסכום החלקי ה- "n"י הינו $S_n = n \cdot a_1$.

במקרה זה ברור שהטור מתבדר מפני שסכומו תופח לאינסוף (או למינוס אינסוף אם a_1 שלילי): $S_{n\to\infty} = \pm\infty$.

אם $q = -1$ מתקבל הטור: $a_1 - a_1 + a_1 - \cdots + a_1 + \cdots$, ואז הסכום החלקי ה- "n"י מתנודד בין a_1 לבין 0 <= מתבדר.

כאשר $q \neq \pm 1$, נבדוק את התכנסות/התבדרות של הטור באופן הבא:

נרשום את הביטוי לסכום החלקי ה- "n"י של הטור: $S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-2} + a_1 \cdot q^{n-1}$ (I

נכפול את שני האגפים ב- q: $q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n$ (II

כעת נחסר את משוואה II ממשוואה I: $S_n - q \cdot S_n = a_1 - a_1 \cdot q^n$

נוציא גורם משותף בשני האגפים: $S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$

נחלק את שני האגפים ב- $(1-q)$ ונקבל את הנוסחה המוכרת לסכום החלקי ה- "n"י של טור הנדסי: $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

אם $|q| < 1$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, ואז $S_{n\to\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1(1-0)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}$.

קיבלנו את הנוסחה לסכומו של טור הנדסי אינסופי "יורד", כזה אשר מנתו קטנה בערכה המוחלט מ- 1: $S_{n\to\infty} = \frac{a_1}{1-q}$

בעמוד הקודם, להזכירכם, השתמשנו בנוסחה $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ מן המוכן והצבנו בה את המקרה הפרטי שבו $a_1 = 1$ ו- $q = \frac{1}{2}$.

או אז השאפנו את מספר האיברים שבטור (n) לאינסוף, וקיבלנו סכום סופי $S_n = 2$.

כאן עשינו הרבה יותר מזה: ראשית פיתחנו את הנוסחה לסכום החלקי ה- "n"י של טור הנדסי: $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

אח"כ השאפנו את מספר האיברים שבטור (n) לאינסוף תחת התנאי ש- $|q| < 1$, והוכחנו שהטור מתכנס לסכום הסופי $\frac{a_1}{1-q}$.

אם $|q| > 1$ הטור מתבדר כמובן, מפני שאז $\lim_{n\to\infty} q^n = \pm\infty$ ומכאן $S_{n\to\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1(1\pm\infty)}{1-q} = \pm\infty$

אם $|q| < 1$, הטור ההנדסי האינסופי $a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1} + \cdots$ מתכנס לסכום הסופי $\frac{a_1}{1-q}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1} = \frac{a_1}{1-q} \quad , \quad |q| < 1$$

אם $|q| > 1$ הטור מתבדר

מצאנו את התנאי הדרוש להתכנסותו של טור הנדסי אינסופי, וגם את הערך שאליו הטור מתכנס תחת תנאי זה.

בהמשך ניתקל בטורים אשר קל יחסית לקבוע אם הם מתכנסים, אך קשה לגלות לאיזה ערך.

הנוסחה $\frac{a_1}{1-q}$ לסכומו של טור הנדסי אינסופי תקפה רק כאשר אינדקס הסכימה n מתחיל ב- $n = 1$ בביטוי $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}$,

או ב- $n = 0$ בביטוי $\sum_{n=0}^{\infty} a_1 \cdot q^n$. במקרה השני, אינדקס הסכימה n אינו מייצג את מקומו של האיבר בטור.

דוגמה: $\frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots + \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1/9}{1-1/3} = \frac{1}{6}$

דוגמה: $5 - \frac{5}{4} + \frac{5}{16} - \frac{5}{64} + \cdots + \frac{(-1)^n \cdot 5}{4^n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} 5 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^n = 5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n = 5 \cdot \frac{1}{1+1/4} = 4$

טורים מתכנסים

סיבה אפשרית לכך שטור אינו מתכנס: איבריו אינם הולכים וקטנים.
דוגמה מהספר (עמ' 766) - הסכומים החלקיים עולים על כל מספר שהוא:
א) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 = 1+4+9+\cdots+n^2+\cdots$ מתבדר, מפני שהסכומים החלקיים שלו גדלים אל מעבר לכל מספר L.
לראיה, מעבר ל- $n=1$ הסכום החלקי $S_n = 1+4+9+\cdots+n^2$ גדול מ- n^2 .
ב) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\cdots+\frac{n+1}{n}+\cdots$ מתבדר אף הוא מאותה סיבה.
כל איבר בטור גדול מ- 1 , כך שסכומם של n איברים גדול מ- n .

מבחן האיבר ה- "n"י להתכנסות

נניח שטור כלשהו מתכנס, ז"א סדרת הסכומים החלקיים שלו $\{S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots\}$ מתכנסת.
אם כך הוא, חייב ההפרש שבין איברים עוקבים בסדרה זו $(S_n - S_{n-1})$ לשאוף ל- 0 כאשר $n \to \infty$.
במילים אחרות, חייב להתקיים $\lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = 0$
כעת נשים לב לכך ש- $S_n = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n$
וש- $S_{n-1} = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}$
נחסר את המשוואות זו מזו ונקבל את המובן מאליו, היינו, שההפרש דנן שווה בעצם לאיבר ה- "n"י שבטור: $S_n - S_{n-1} = a_n$
נוכל לסכם ולומר כי אם טור כלשהו מתכנס, בהכרח מתקיים לגביו $\lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} a_n = 0$
הדבר מבסס את תיאורמה 7 שלהלן:

תיאורמה 7
אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אזי $a_n \to 0$

זהירות!
תיאורמה 7 אינה אומרת ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם $a_n \to 0$.
טור יכול להתבדר גם אם $a_n \to 0$.

תיאורמה 7 מבססת את המבחן הבא לבדיקת התבדרות (התבדרות מהסוג שבשתי הדוגמאות שבראש עמוד זה):

מבחן האיבר ה- "n"י להתבדרות
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר, אם $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ או שאינו קיים.

מספר דוגמאות לשימוש במבחן האיבר ה- "n"י להתבדרות

א) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ מתבדר כי $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$

ב) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ מתבדר כי $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1 \neq 0$

ג) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ מתבדר כי הגבול $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1}$ אינו קיים.

ד) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n}{2n+5}$ מתבדר כי $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-n}{2n+5}\right) = -\frac{1}{2} \neq 0$

הטור ההרמוני $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ מהווה דוגמה טובה לטור מתבדר **למרות שמתקיים בו** $a_n \to 0$.

אם נתבונן בו כך: $1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\right)+\cdots$,
נוכל להבחין כי תוכנם של כל סוגריים גדול מ- $\frac{1}{2}$.
אם כך, לפנינו מערך אינסופי של סוגריים אשר בכל אחד מהם מספר גדול מ- $\frac{1}{2}$.
אינסוף פעמים מספר גדול מ- $\frac{1}{2}$ מניב אינסוף, והרי לנו הוכחה לכך שהטור ההרמוני מתבדר.

צירוף טורים

כאשר ישנם שני טורים מתכנסים, ניתן לחברם או לחסרם איבר אחר איבר, או לכפול אותם בקבוע, ויתקבל טור מתכנס.

תיאורמה 8

אם $\sum a_n = A$ ו- $\sum b_n = B$ הם טורים מתכנסים, אזי:

כלל הסכום: $\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n = A + B$

כלל ההפרש: $\sum(a_n - b_n) = \sum a_n - \sum b_n = A - B$

כלל ההכפלה בקבוע: $\sum k a_n = k \cdot \sum a_n = k \cdot A$ (כל מספר k)

זהירות!

$\sum(a_n + b_n)$ יכול להתכנס גם אם

$\sum a_n$ ו- $\sum b_n$ מתבדרים כל אחד לחוד.

כפועל יוצא של תיאורמה 8 אנו מקבלים:

א) הכפלתו של טור מתבדר בקבוע שונה מאפס מניבה טור מתבדר.

ב) אם $\sum a_n$ מתכנס ו- $\sum b_n$ מתבדר, אזי $\sum(a_n + b_n)$ ו- $\sum(a_n - b_n)$ מתבדרים שניהם.

<u>דוגמה לשימוש בכלל ההפרש:</u> $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}-1}{6^{n-1}}$

הסיגמה השמאלית היא טור הנדסי אינסופי בו $q = \frac{1}{2}$, $a_1 = 1$ ולכן $2 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

הסיגמה הימנית היא טור הנדסי אינסופי בו $q = \frac{1}{6}$, $a_1 = 1$ ולכן $\frac{6}{5} = \frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$

לסיכום: $\frac{4}{5} = 2 - \frac{6}{5} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}-1}{6^{n-1}}$

<u>דוגמה לשימוש בכלל ההכפלה בקבוע:</u> $8 = 4 \cdot 2 = 4 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{2^n}\right)$

הוספה או מחיקה של איברים

ניתן להוסיף לטור או למחוק ממנו מספר סופי של איברים, והדבר לא ישפיע על היותו מתכנס או מתבדר.
(אם הטור מתכנס יושפע מכך סכומו בד"כ, מן הסתם).

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אזי מתכנס גם $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ עבור כל $1 < k$ ומתקיים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty} a_n$$

באופן הפוך, אם $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ מתכנס עבור $1 < k$ כלשהו, אזי מתכנס גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

להמחשה: $\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{1}{5^n}\right) + \frac{1}{125} + \frac{1}{25} + \frac{1}{5} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5^n}\right)$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5^n}\right)$ מתכנס, ולכן מתכנס גם $\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{1}{5^n}\right)$

$\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{1}{5^n}\right)$ מתכנס, ולכן מתכנס גם $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5^n}\right)$