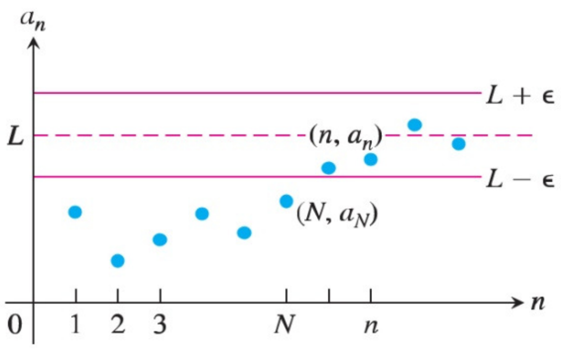
סדרות

הגדרה: סדרה אינסופית של מספרים הוא פונקציה אשר התחום שלה (n) הוא האוסף של השלמים החיוביים.

התכנסות והתבדרות של סדרות:
לפעמים המספרים שבסדרה מתכנסים לערך מסוים כשמקומם בסדרה גדל.
הדבר מתרחש בסדרה הבאה למשל: $\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\dots,\frac{1}{n},\dots\}$, אשר בה כל איבר שווה לאחד חלקי מקומו בטור.
ככל שמקום האיבר (n) גדול יותר, האיבר (a_n) קטן יותר. כאשר $n \to \infty$, $a_n \to 0$. במקרה זה נאמר כי הסדרה מתכנסת ל-0.
הסדרה $\{0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\dots,1-\frac{1}{n},\dots\}$, אשר בה כל איבר שווה ל"אחד מינוס אחד חלקי המקום", מתכנסת ל-1.
הסדרה $\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\dots,\sqrt{n},\dots\}$ מתבדרת מפני שכאשר $n \to \infty$, $a_n \to \infty$, ז"א איבריה אינם שואפים לערך סופי.
הסדרה $\{1,-1,1,-1,1,-1,\dots,(-1)^{n+1},\dots\}$ אינה מתכנסת אלא סתם מתנודדת בין 1 לבין 1- .
ההגדרה במסגרת שמתחת עוזרת להבין את משמעות התכנסותה של סדרה לגבול מסוים, ז"א לערך סופי.
היא אומרת שאם מתקדמים בסדרה רחוק מספיק, ז"א עד ל- n גדול מספיק, ההפרש שבין a_n לבין הגבול הופך להיות קטן מ- ε, אשר מייצג "מספר חיובי קטן לאין שיעור".

הסדרה $\{a_n\}$ מתכנסת לערך L אם לכל מספר חיובי ε מתאים מספר שלם N,
כך שלכל $N < n$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$.
אם לא קיים L ע"פ ההגדרה הנ"ל, נאמר כי $\{a_n\}$ מתבדרת.
אם $\{a_n\}$ מתכנסת לערך L, נכתוב $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, או פשוט $a_n \to L$,
ונקרא ל- L "הגבול של הסדרה".
אם $a_n \to L$ היא $y = L$ אסימפטוטה אופקית של רצף הנקודות $\{n\ ,a_n\}$.
כל a_n שאחרי a_N נמצא בטווח $\pm\varepsilon$ מ- L , כפי שמראה האיור משמאל.



דוגמה מהספר (עמ' 749):
אמרנו קודם שהסדרה $\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\dots,\frac{1}{n},\dots\}$ מתכנסת ל- 0. הדבר ברור וקל לראותו, אך כיצד מוכיחים זאת?
המשימה: להוכיח כי $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

ההוכחה:
נתון $0 < \varepsilon$. עלינו להראות שקיים שלם N כך שלכל n המקיים $N < n$ מתקיימת הדרישה $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$.

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \quad => \quad \frac{1}{\varepsilon} < n$$

אם N הוא שלם כלשהו הגדול מ- $\frac{1}{\varepsilon}$, הדרישה תתקיים עבור כל $N < n$. **הוכחנו את שנדרשנו להוכיח:** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

חישוב גבולות של סדרות.

אם נידרש להשתמש בהגדרת הגבול הנ"ל בכל פעם שנרצה לחשב גבול של סדרה, יהיה החישוב ארוך ומייגע.
לצורך ניתוח מהיר של גבולותיהן של סדרות, מוטב לנו להיעזר ב"ארגז כלים" מוכן מראש המכיל כללים בסיסיים.
שלא במפתיע, כללים אלה הם בעצם "גרסאות מותאמות" של הכללים בהם השתמשנו בחדו"א 1 עבור פונקציות רציפות:

תיאורמה 1 (תיאורמה היא כלל מתמטי הטעון הוכחה על יסוד כלים שכבר הוכחו או על יסוד אקסיומות)
נניח כי $\{a_n\}$ ו- $\{b_n\}$ הן שתי סדרות מספרים. אם $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ ו- $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, אזי מתקיימים הכללים הבאים:

כלל הסכום/הפרש: $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$
כלל המכפלה: $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$
כלל ההכפלה בקבוע: $\lim_{n\to\infty}(k \cdot b_n) = k \cdot B$
כלל המנה: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$

דוגמה מהספר (עמ' 751) לשימוש בכלל ההפרש וגם בעובדה (אותה הוכחנו קודם) ש- $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}(1) - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - 0 = 1$$

תיאורמה 2
כלל הסנדוויץ' לסדרות: נניח ש- $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ו- $\{c_n\}$ הן שלוש סדרות של מספרים.
אם מתקיים $a_n \le b_n \le c_n$ עבור כל n שמעבר ל- N מסוים, וכמו כן מתקיים $lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty} c_n = L$
אזי $lim_{n\to\infty} b_n = L$ אף הוא.

מסקנה מיידית אשר נובעת מתיאורמה 2 היא, שאם $|b_n| \le c_n$ וכמו כן $c_n \to 0$, אזי $b_n \to 0$.
זאת מכיוון שלכתוב $|b_n| \le c_n$ זה בעצם לכתוב $-c_n \le b_n \le c_n$.

דוגמה מהספר (עמ' 752) לשימוש בכלל הסנדוויץ, ובכך ש- $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ (הוכחנו זאת קודם):
א) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cos n}{n}\right) = 0$ וזאת מפני ש- $-\frac{1}{n} \le \frac{\cos n}{n} \le \frac{1}{n}$ (או בכתיב אחר: $\left|\frac{\cos n}{n}\right| \le \frac{1}{n}$)
ב) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right) = 0$ וזאת מפני ש- $0 \le \frac{1}{2^n} \le \frac{1}{n}$
ג) $\lim_{n\to\infty}\left[(-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right] = 0$ וזאת מפני ש- $-\frac{1}{n} \le (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \le \frac{1}{n}$ (או בכתיב אחר: $\left|(-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right| \le \frac{1}{n}$)

תיאורמה שלישית גורסת כי החלתה של פונקציה רציפה על סדרה מתכנסת מניבה סדרה מתכנסת.

תיאורמה 3
נניח ש- $\{a_n\}$ היא סדרה של מספרים.
אם $lim_{n\to\infty} a_n = L$ ואם f היא פונקציה רציפה ב- L וכמו כן מוגדרת לכל a_n, אזי $lim_{n\to\infty} f_{(a_n)} = f_{(L)}$

דוגמה מהספר (עמ' 752) לשימוש בתיאורמה 3:
הראה כי $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}} = 1$
<u>פיתרון:</u>
אנו יודעים ש- $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1$. כמו כן, פונקצית השורש הריבועי רציפה ב- 1 ומוגדרת לכל $a_n = \frac{n+1}{n}$ בסדרה זו.
נפעיל פונקציה זו על הסדרה שבאגף שמאל ועל הגבול שלה שבאגף ימין: $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \sqrt{1}$ והרי לנו מש"ל.

דוגמה נוספת:
לאן מתכנסת הסדרה $2^{\frac{1}{n}}$? ברור של- 1, רואים זאת בנקל, אך אנו נשתמש בתיאורמה 3 כדי להראות שאכן כך הוא:
אנו יודעים ש- $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$. כמו כן, הפונקציה "שתיים בחזקת" רציפה ב- 0 ומוגדרת לכל $a_n = \frac{1}{n}$ בסדרה זו.
נפעיל פונקציה זו על הסדרה שבאגף שמאל ועל הגבול שלה שבאגף ימין: $\lim_{n\to\infty}\left(2^{1/n}\right) = 2^0$. הגבול המבוקש הינו 1.

<u>השימוש בכלל לופיטל</u>

התיאורמה הבאה מאפשרת לנו להחיל את כלל לופיטל על סדרות מסוימות כדי למצוא את גבולותיהן.
היא מבססת את הקשר שבין $\lim_{n\to\infty} a_n$ לבין $\lim_{x\to\infty} f_{(x)}$.

תיאורמה 4
נניח ש- $f_{(x)}$ היא פונקציה המוגדרת לכל $n_0 \le x$, וש- $\{a_n\}$ היא סדרה של מספרים כך שעבור כל $n_0 \le n$ מתקיים $a_n = f_{(n)}$.
או אז מתקיים: אם $\lim_{x\to\infty} f_{(x)} = L$ גם $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

דוגמה מהספר (עמ' 753) לשימוש בכלל לופיטל כדי לחשב גבול של סדרה:
הראה כי $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = 0$
<u>פיתרון:</u>
הפונקציה $f_{(x)} = \frac{\ln x}{x}$ מוגדרת (לבטח) לכל $1 \le x$, והסדרה $a_n = \frac{\ln n}{n}$ שווה לה עבור כל $1 \le n$.
לכן, ע"פ תיאורמה 4, $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1} = 0$ והראינו את שנדרשנו להראות.

כשמשתמשים בכלל לופיטל למציאת גבול של סדרה, מקובל להתייחס ל- n כאילו הוא משתנה רציף ולגזור ישירות לפיו.
הדבר אומנם אינו "תקין פוליטית", אך חוסך את שכתובו של $\mathbf{a_n}$ כפונקציה רציפה $f_{(x)}$.

דוגמה נוספת מהספר (עמ' 753) לשימוש בכלל לופיטל כדי לחשב גבול של סדרה:
חשב את $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{5n}$

<u>פיתרון</u>: הפונקציה $f_{(x)}=\frac{2^x}{5x}$ מוגדרת (לבטח) לכל $1\le x$ <= $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{5n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot\ln 2}{5} = \frac{\ln 2}{5}\cdot\lim_{n\to\infty}(2^n) = \infty$

עוד דוגמה מהספר: האם הסדרה שאיברה הכללי הוא $\mathbf{a_n}=\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$ מתכנסת? אם כן, חשב את $\lim_{n\to\infty}\mathbf{a_n}$.
<u>פיתרון</u>: ראשית כל, הפונקציה $f_{(x)}=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$ מוגדרת (לבטח) לכל $2\le x$ כך שיש לנו "אור ירוק" להמשיך.
חישוב ישיר של הגבול מביא אותנו למבוי סתום: $\lim_{n\to\infty}\mathbf{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = 1^\infty$.
ניקח את הלוגריתם של $\mathbf{a_n}$ כדי להגיע למצב $\lim_{n\to\infty}f_{(n)}=\left[\frac{0}{0}\right]$ אשר מאפשר שימוש בכלל לופיטל:

$$ln a_n = ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = n\cdot ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \frac{ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)}{1/n} \quad => \quad lim_{n\to\infty} ln a_n = lim_{n\to\infty}\frac{ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)}{1/n} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

כעת נשתמש בכלל לופיטל:

$$\lim_{n\to\infty} ln a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)}{1/n} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-1-(n+1)}{(n-1)^2}}{\frac{-1}{n^2}} = 2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2-1} = 2\cdot 1 = 2$$

קיבלנו $lim_{n\to\infty} ln a_n = 2$, ומאחר ו- $f_{(x)}=e^x$ רציפה, הרי ש- $lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty} e^{ln a_n} = e^{lim_{n\to\infty} ln a_n} = e^2$.
הסדרה שאיברה הכללי הוא $\mathbf{a_n}=\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$ מתכנסת אם כן ל- e^2.

התיאורמה הבאה מציגה גבולות שכיחים - כאלה שבהם אנו נתקלים לעיתים קרובות:

תיאורמה 5
ששת הסדרות שלהלן מתכנסות לגבולות הר"מ:

1. $lim_{n\to\infty}\frac{ln\, n}{n}=0$
2. $lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$
3. $lim_{n\to\infty}x^{1/n}=1 \quad (0<x)$
4. $lim_{n\to\infty}x^n=0 \quad (|x|<1)$
5. $lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$ (כל x שהוא)
6. $lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$ (כל x שהוא)

בנוסחאות 3 עד 6 , x נותר קבוע עת $n\to\infty$

דוגמאות מהספר (עמ' 754) לשימוש בתיאורמה 5 :

a) $lim_{n\to\infty}\frac{ln(n^2)}{n} = lim_{n\to\infty}\frac{2\,ln\,n}{n} = 2\cdot lim_{n\to\infty}\frac{ln\,n}{n} = 0$

b) $lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2} = lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 = (1)^2 = 1$

c) $lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3n} = lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{3}\cdot\sqrt[n]{n}\right) =$
$= \lim_{n\to\infty}\left(3^{\frac{1}{n}}\cdot\sqrt[n]{n}\right) = \lim_{n\to\infty}3^{\frac{1}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1\cdot 1 = 1$

d) $lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$

e) $lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n}\right)^n = lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{n}\right)^n = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$

f) $lim_{n\to\infty}\frac{100^n}{n!} = 0$

את גבול מס' 1 שבתיאורמה 5 חישבנו קודם. את גבולות מס' 2 ו- 3 ניתן לחשב באמצעות הוצאת לוגריתם + תיאורמה 4 .
ההוכחות לגבולות 4, 5, ו- 6 מופיעות בנספח 3 שבספר.

סדרות חסומות שאינן יורדות

איבריה של סדרה יכולים להתנודד כשמתקדמים בה, ז"א לגדול ואח"כ לקטון ואז שוב לגדול וכיו"ב.
סוג חשוב של סדרות הן אלה שבהן כל איבר גדול לפחות כקודמו.

הגדרה: **סדרה שאינה יורדת**
סדרה $\{a_n\}$ אשר בה מתקיים $a_n \le a_{n+1}$ לכל n , נקראת סדרה שאינה יורדת.

דוגמאות לסדרות שאינן יורדות:

א) סדרת המספרים הטבעיים $\{1,2\,,3\,,\ldots,n,\ldots\}$
ב) הסדרה $\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\ldots,\frac{n}{n+1},\ldots\right\}$
ג) הסדרה הקבועה $\{3\}$

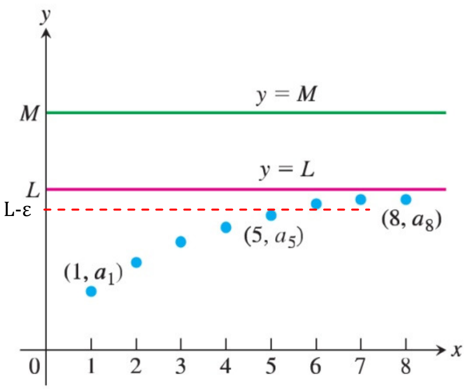
ישנם שני סוגים של סדרות שאינן יורדות – אלה שאבריהן גדלים ללא גבול, ואלה שאבריהן אינם כאלה.

הגדרות: **סדרה חסומה, חסם עליון, חסם עליון מינימאלי**
סדרה $\{a_n\}$ הינה חסומה מלעיל אם קיים מספר **M** כך ש- $\mathbf{a_n \le M}$ לכל n.
המספר **M** מהווה חסם עליון לסדרה $\{a_n\}$.
אם **M** מהווה חסם עליון לסדרה $\{a_n\}$ ואין מספר קטן מ- **M** אשר מהווה חסם עליון לסדרה $\{a_n\}$,
אזי **M** מהווה **חסם עליון מינימאלי לסדרה** $\{a_n\}$.

דוגמה להחלת ההגדרה לחסימות:

א) לסדרה $\{\mathbf{1},\mathbf{2}\,,\mathbf{3}\,,\ldots,\boldsymbol{n},\ldots\}$ אין חסם עליון.
ב) הסדרה $\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\ldots,\frac{n}{n+1},\ldots\right\}$ חסומה מלעיל ע"י M=1 .
אין מספר קטן מ- 1 אשר מהווה חסם עליון לסדרה זו, לכן 1 הוא החסם העליון המינימאלי שלה.

לסדרה שאינה יורדת ואשר חסומה מלעיל, יש תמיד חסם עליון מינימאלי.
אם **L** הוא החסם העליון המינימאלי, אזי הסדרה מתכנסת ל- **L** .



אם לאיבריה של סדרה **שאינה** יורדת יש
חסם עליון **M**, אזי יש להם גבול $\mathbf{L \le M}$.

תיאורמה 6 – **תיאורמת הסדרה שאינה יורדת**
סדרה שאינה יורדת מתכנסת אם ורק אם היא חסומה מלעיל.
אם סדרה שאינה יורדת מתכנסת, היא מתכנסת לחסם העליון המינימאלי שלה.

תיאורמה 6 אומרת שסדרה אשר אינה יורדת מתכנסת אם היא חסומה מלעיל.
אם היא אינה חסומה מלעיל, היא מתבדרת לאינסוף.

הוכחה לכך שאם **L** הוא החסם העליון המינימאלי, אזי הסדרה מתכנסת ל- **L** :
נניח ש- M מהווה חסם עליון לסדרה $\{a_n\}$ אשר איבריה מיוצגים באיור לעיל ע"י הנקודות $(1\,,a_1)\,,\,(2\,,a_2)\,,\,\ldots\,,\,(n\,,a_n)\,,\,\ldots$
ז"א כל הנקודות הנ"ל נמצאות מתחת לישר $y = M$, או לכל היותר עליו.
כעת נניח ש- $y = L$ הוא הישר **הנמוך ביותר** המקיים זאת, ז"א אף נקודה $(n\,,a_n)$ אינה נמצאת מעליו, אך ישנן נקודות אשר נמצאות
מעל ישר נמוך ממנו $y = L - \varepsilon$ (ε מספר חיובי). הסדרה מתכנסת ל- L מפני ש:
1) $\mathbf{a_n \le L}$ לכל $\boldsymbol{n}$
2) לכל $\boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$ קיים לפחות שלם חיובי אחד **N** שעבורו $\boldsymbol{L - \varepsilon < a_N}$
3) הסדרה $\{a_n\}$ אינה יורדת ולכן $\boldsymbol{a_N \le a_n}$ עבור כל $\boldsymbol{N \le n}$
לסיכום נקבל: עבור כל $\mathbf{N \le n}$ מתקיים $\boldsymbol{L - \varepsilon \,<\, a_N \le a_n \le L}$
אם כך, האיבר ה- "N" וכל אלה הבאים אחריו נמצאים בטווח **ε** מ- **L**, וזהו בדיוק התנאי הדרוש ל- L כדי להיות גבול הסדרה $\{a_n\}$.