חשב את הנפח המתקבל מסיבוב העקומה $y = e^{-ax^2}$, כאשר $0 \leq x$, סביב ציר Y.

פיתרון:

בשיטת הקליפות הגליליות:

שטחה של קליפה הינו $A_{(x)} = 2\pi r_{(x)} \cdot h_{(x)} = 2\pi x \cdot e^{-ax^2}$

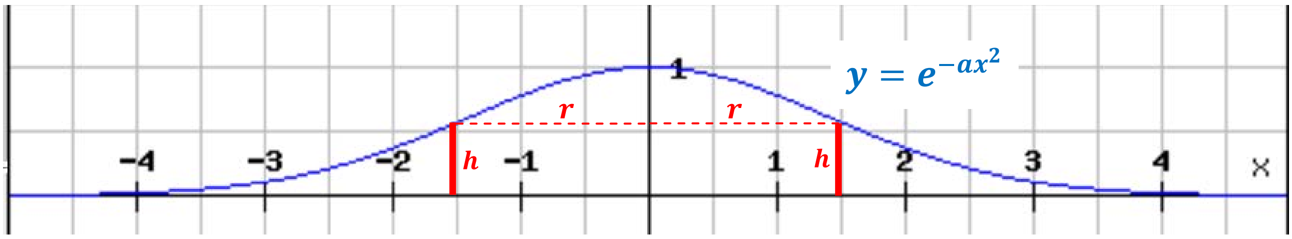
נפחה של קליפה הינו מכפלת שטחה בעובייה : $dV_{(x)} = A_{(x)} \cdot dx = 2\pi x \cdot e^{-ax^2} \cdot dx$

אינטגרציה של אינסוף קליפות כאלה בתחום $[0, \infty)$ תניב את הנפח המבוקש :

$$2\pi \int_0^\infty x \cdot e^{-ax^2} \cdot dx \quad \rightarrow \quad \begin{cases} u = -ax^2 \\ du = -2ax \cdot dx \end{cases} \quad => \quad x = 0 \rightarrow u = 0 \quad , \quad x = \infty \rightarrow u = -\infty$$

$$\frac{2\pi}{-2a} \int_0^\infty -2ax \cdot e^{-ax^2} \cdot dx \quad = \quad -\frac{\pi}{a} \int_0^{-\infty} e^u \cdot du \quad = \quad \frac{\pi}{a} \int_{-\infty}^0 e^u \cdot du \quad = \quad \frac{\pi}{a} \lim_{b \to -\infty} \int_b^0 e^u \cdot du \quad =$$

$$= \quad \frac{\pi}{a} \lim_{b \to -\infty} e^u \Big|_b^0 \quad = \quad \frac{\pi}{a} \lim_{b \to -\infty} \left(e^0 - e^b\right) \quad = \quad \frac{\pi}{a} \quad \textit{Cubic Units}$$



a מספר חיובי. ככל שהוא קטן יותר, הגרף "פתוח" יותר. בגרף שלעיל $a = 0.25$.