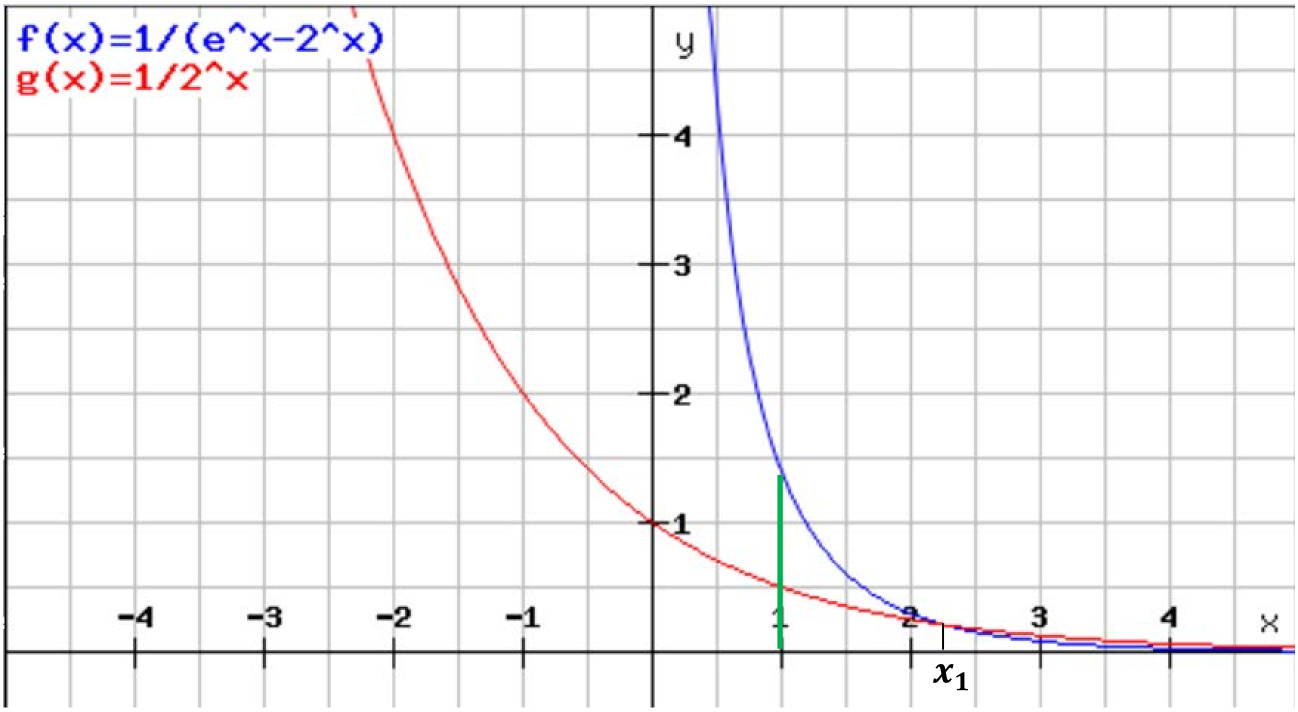
האם $\int_1^{\infty} \frac{1}{e^x-2^x} dx$ מתכנס ?

פיתרון :

מ- $x_1 \approx 2.25$ ואילך, ז"א בתחום $x_1 < x < \infty$, $g_{(x)} = \frac{1}{2^x}$ מהווה גג לאינטגרנד הנתון $f_{(x)} = \frac{1}{e^x-2^x}$ (ראה גרף).

קל להראות ש- $\int_{x_1}^{\infty} \frac{1}{2^x} dx$ מתכנס (הוכחה למטה), ואם כך, $\int_{x_1}^{\infty} \frac{1}{e^x-2^x} dx$ מתכנס לבטח.

נוסיף לכך את $\int_1^{x_1} \frac{1}{e^x-2^x} dx$ אשר ברור שהינו סופי (ראה גרף), ונקבל תוצאה סופית, ז"א האינטגרל $\int_1^{\infty} \frac{1}{e^x-2^x} dx$ מתכנס.



הוכחה ש- $\int_{x_1}^{\infty} \frac{1}{2^x} dx$ מתכנס :

$$\int_{x_1}^{\infty} \frac{1}{2^x} dx = \int_{x_1}^{\infty} 2^{-x} dx = \lim_{b\to\infty} \int_{x_1}^{b} 2^{-x} dx = \frac{-1}{\ln 2} \lim_{b\to\infty} 2^{-x}\Big|_{x_1}^{b} = \frac{-1}{\ln 2} \lim_{b\to\infty} \left(2^{-b} - 2^{-x_1}\right) = \frac{-1}{\ln 2}\left(0 - 2^{-x_1}\right) =$$

$$= \frac{1}{\ln 2 \cdot 2^{x_1}} \approx 0.3$$