

נתונה הסדרה

$$\left\{ 1 - \frac{\sin n}{n} \right\}_1^\infty$$

על פי הגדרת "הגבול של הסדרה" מהוא אותו N שהחל ממנו מתקיים:

$$|a_n - L| \leq 0.05$$

תשובה:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\sin n}{n} \right) = 1$$

הסדרה מתכנסת ל- $L = 1$, ואנו נשאלים מהו המקום N אשר ממנו ואילך מתקיים שההפרש בין a_n לבין גבול הסדרה L שווה 0.05 לכל היותר.

$$|a_n - L| \leq 0.05 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \left(1 - \frac{\sin n}{n} \right) - 1 \right| \leq 0.05 \Rightarrow$$

$$\left| \frac{\sin n}{n} \right| \leq 0.05 \Rightarrow \frac{|\sin n|}{n} \leq 0.05$$

כאשר $\frac{1}{n} \leq 0.05$ מתמלאת לבטח הדרישה הנ"ל, שהרי

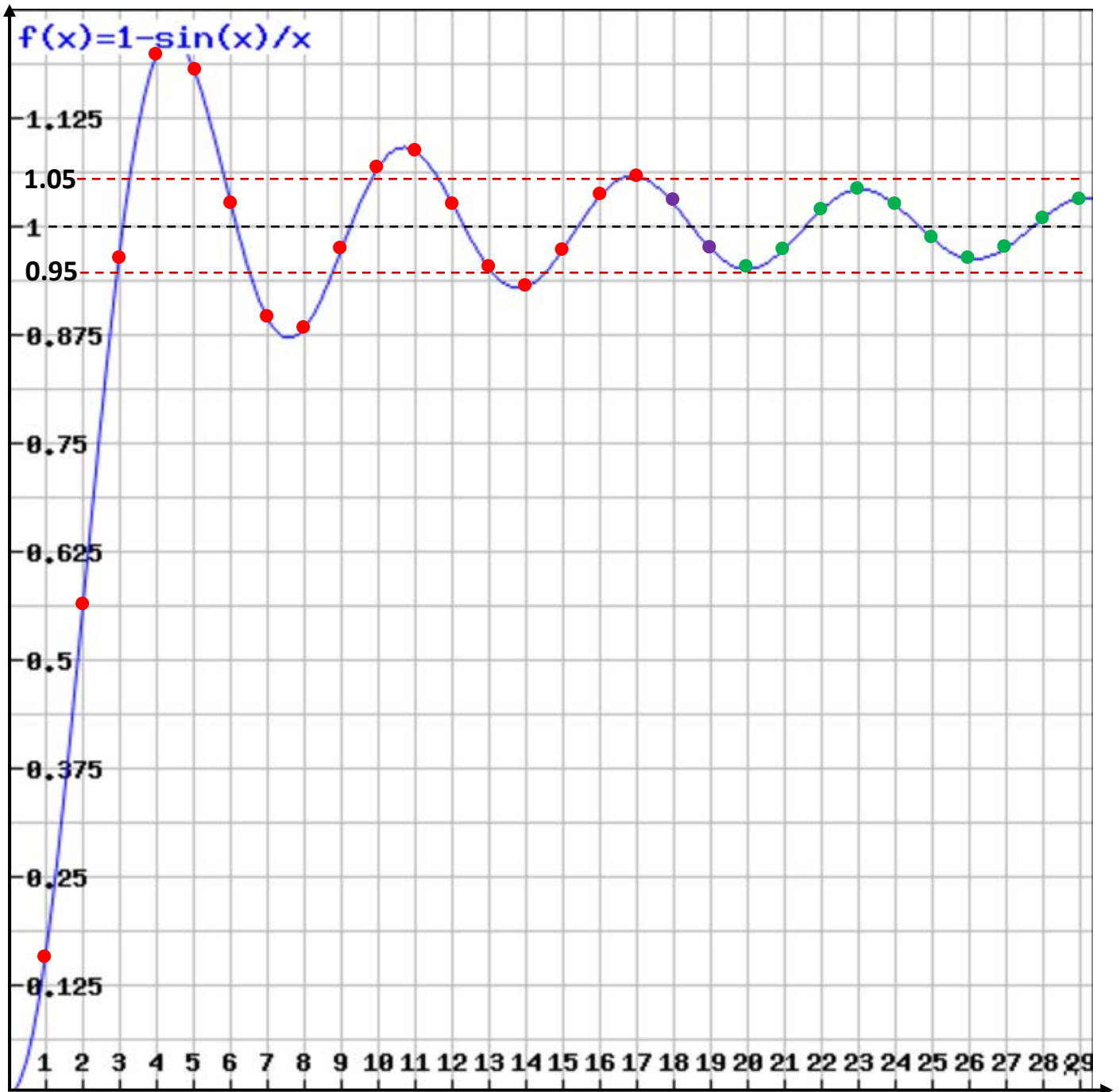
$$\frac{|\sin n|}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n} \leq 0.05 \Rightarrow 20 \leq n$$

גילינו ש- a_{20} וכל איבר שאחריו עומדים בדרישה, טוב ויפה, אבל השתמשנו ב"גג" $\left(\frac{1}{n}\right)$ ולכן ייתכן שהדרישה מתמלאת החל

באיבר "מוקדם" יותר. כדי לבדוק זאת נתבונן קודם כל בגרף הפונקציה אשר מתאימה לסדרה הנתונה (מוצג בעמוד הבא).

זהו גרף רציף, ואנו מתעניינים רק באותן נקודות עליו אשר מתאימות לערכי X שלמים וחיוביים - ערכים של n .



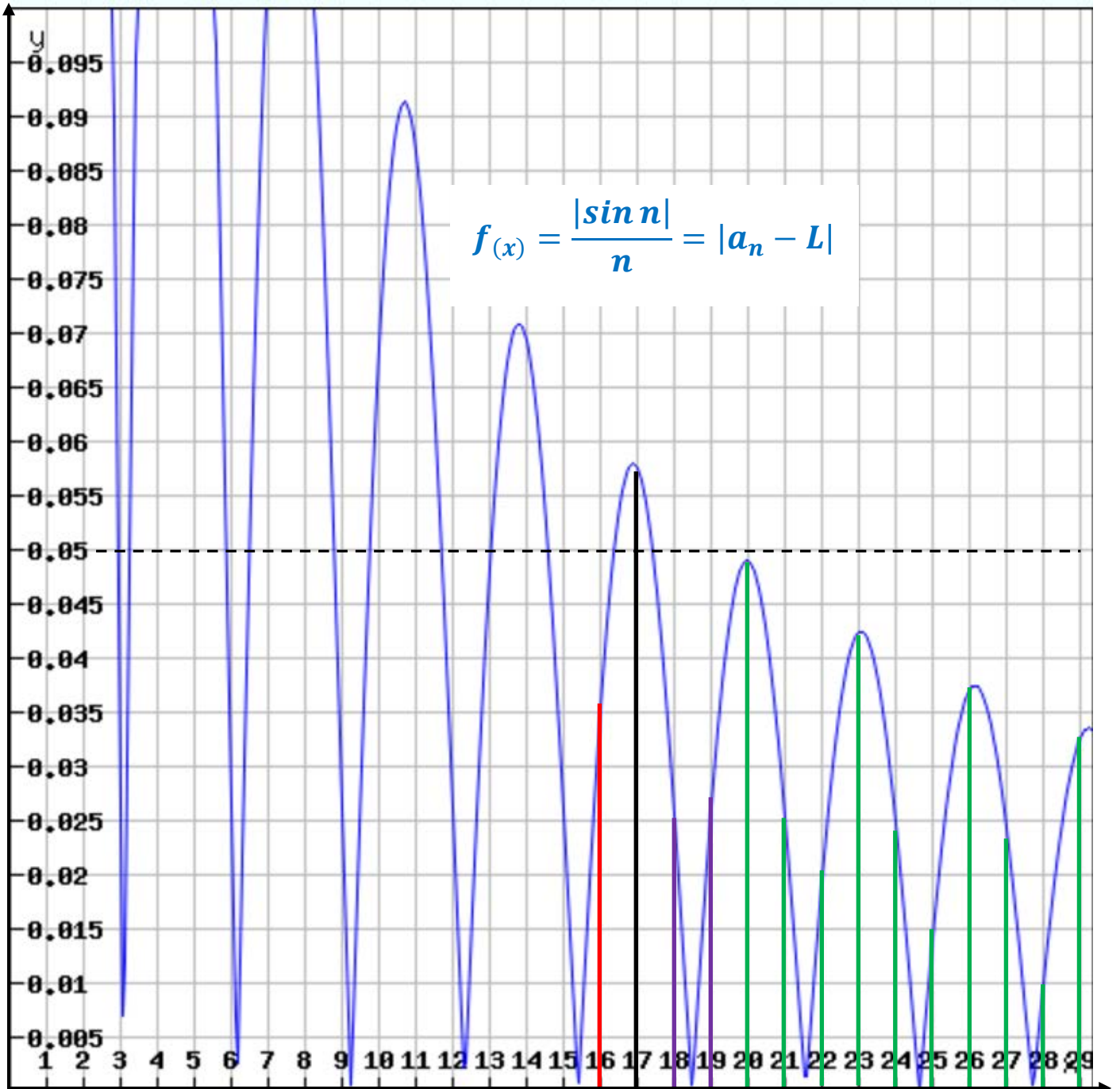
הנקודות שעל הגרף הן 29 האיברים הראשונים בסדרה האינסופית הנתונה $\left\{1 - \frac{\sin n}{n}\right\}_1^\infty$.

ניתן להבחין במגמת התכנסותה של הסדרה לגבול $L = 1$ תוך שהיא מתנדדת סביבו.

הוכחנו כבר אלגברית כי לכל נקודה מהמקום ה-20 ואילך (ירוק) מתקיים שהמרחק בינה לבין הגבול ($L = 1$) קטן מ-0.05.

אבל, בשל האופי התנדודתי של ההתכנסות, נכון הדבר כבר מהמקום ה-18 - שתי נקודות (סגולות) קודם לכן.

כדי להיווכח בכך, נתבונן בגרף הבא המתאר את ההפרש (בערך מוחלט) שבין a_n לבין הגבול, כפונקציה של מקום האיבר n .



ניתן לראות כאן שכבר החל ב- a_{18} מתמלאת הדרישה – שני הקווים **הסגולים** קצרים מ-0.05 (הירוקים הוכחו אלגברית).

a_{17} אינו עומד בדרישה - הקו **השחור** ארוך מ-0.05 .

a_{16} עומד בדרישה (הקו **האדום** קצר מ-0.05), וכמוהו גם a_{15} ועוד כמה איברים קודמים, אך כל אלה אינם מעניינים אותנו

בשל a_{17} . רק לאחריו ניתן לומר כי **כל** הקווים, ללא יוצא מן הכלל, קצרים או שווים ל-0.05 .

התשובה היא אם כן: $N = 18$