1. חקירת פונקציות

נניח כי $h=f \cdot g$ היא מכפלה של שתי פונקציות גזירות אשר תלויות ב-x.

א. אם f ו-g חיוביות ובעלות מקסימום מקומי בְּ- $x=a$, וכמו כן f' ו- g' משנות סימן בנקודה a, האם גם ל-h יש מקסימום מקומי בנקודה a? 12 נקו'

ב. אם בגרפים של f ושל g יש פיתול בנקודה a, האם גם ל-h יש פיתול בנקודה a? 13 נקו'

בשני הסעיפים, אם התשובה חיובית עליך להוכיח זאת ואם שלילית עליך להביא דוגמא נגדית.

פיתרון א': $f_{(x)}$ ו- $g_{(x)}$ בעלות מקסימום מקומי ב- $x=a$, האם גם ל- $h_{(x)}$ יש מקסימום מקומי ב- $x=a$?

$$h_{(x)}=f_{(x)}\cdot g_{(x)} \quad => \quad h'_{(x)}=\left[f_{(x)}\cdot g_{(x)}\right]'=f'_{(x)}\cdot g_{(x)}+f_{(x)}\cdot g'_{(x)}$$

	$x<a$	$x=a$	$a<x$
$f_{(x)}$	+ (given)	+ (given)	+ (given)
$g_{(x)}$	+ (given)	+ (given)	+ (given)
$f'_{(x)}$	+ (given)	0 (given)	− (given)
$g'_{(x)}$	+ (given)	0 (given)	− (given)
$h'_{(x)}$	$pos\cdot pos+pos\cdot pos$ +	$0\cdot pos+pos\cdot 0$ 0	$neg\cdot pos+pos\cdot neg$ −

כן, כי כאשר מציבים בנוסחה לנגזרת המכפלה את סימניהן של $f_{(x)}$ ו- $g_{(x)}$ (נתון שחיוביים) ואת סימניהן של $f'_{(x)}$ ו- $g'_{(x)}$ סביב $x=a$ (נתון שמשנות סימן ב- $x=a$ ומובן שמחיובי לשלילי בגין <u>מקסימום</u> מקומי), מתקבל ש- $h'_{(x)}$ מחליפה אף היא סימן ב- $x=a$ מחיובי לשלילי, משמע ל- $h_{(x)}$ יש מקסימום מקומי ב- $x=a$.

פיתרון ב': $f_{(x)}$ ו- $g_{(x)}$ בעלות פיתול ב- $x=a$, האם גם ל- $h_{(x)}$ יש פיתול ב- $x=a$?

$$h''_{(x)}=\left[f'_{(x)}\cdot g_{(x)}+f_{(x)}\cdot g'_{(x)}\right]' = \left[f'_{(x)}\cdot g_{(x)}\right]'+\left[f_{(x)}\cdot g'_{(x)}\right]' =$$

$$= f''_{(x)}\cdot g_{(x)}+f'_{(x)}\cdot g'_{(x)}+f'_{(x)}\cdot g'_{(x)}+f_{(x)}\cdot g''_{(x)}$$

	$x<a$	$x=a$	$a<x$
$f_{(x)}$			
$g_{(x)}$			
$f'_{(x)}$	+/−	could be 0	+/−
$g'_{(x)}$	+/− −/+	could be 0	+/− −/+
$f''_{(x)}$	+/−	0 (given)	−/+
$g''_{(x)}$	+/−	0 (given)	−/+
$h''_{(x)}$	+ −	0 possible 0 possible	+ −

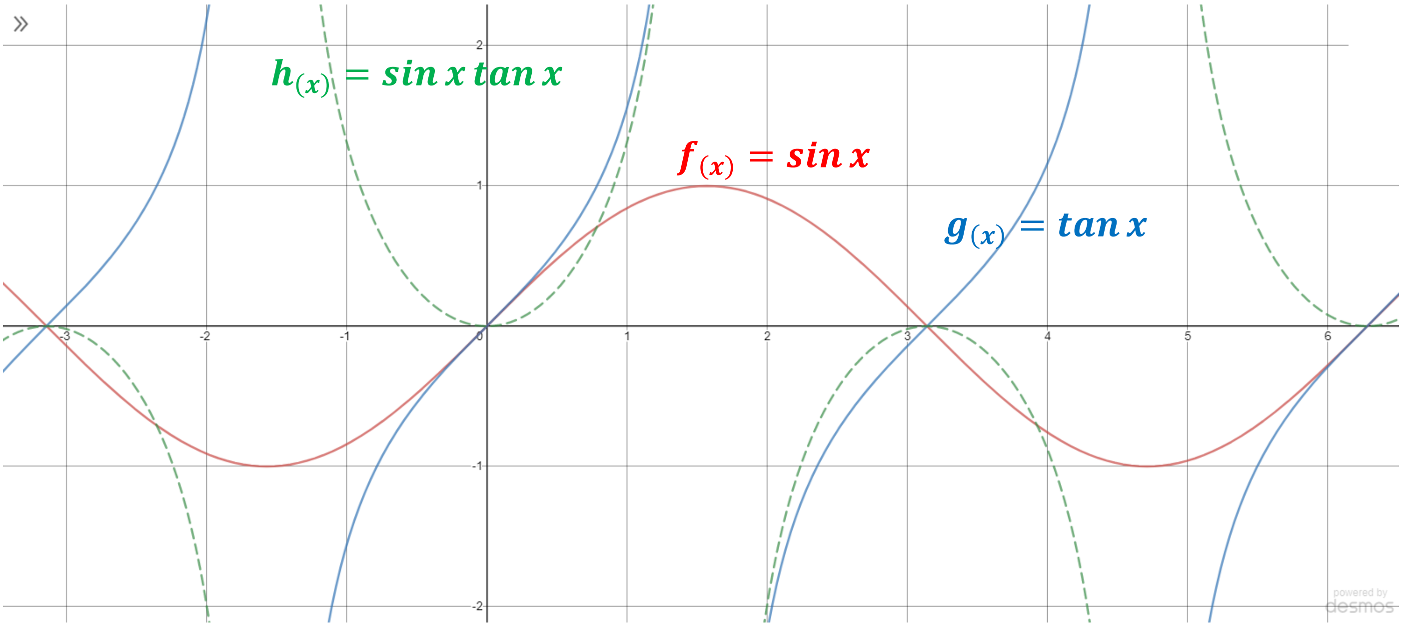
$$\lim_{x\to a} f''_{(x)}=\lim_{x\to a} g''_{(x)}=0 \quad => \quad \lim_{x\to a} h''_{(x)}=2f'_{(x)}\cdot g'_{(x)}$$

$h''_{(x)}$ יכולה להתאפס ב- $x=a$ אך לא להחליף סימן, ולפיכך לא יתכן שם פיתול בגרף של $h_{(x)}$.

הרחבה + דוגמה בעמוד הבא.

יתרה מכך, אם $f_{(x)}$ ו- $g_{(x)}$ עולות שתיהן או יורדות שתיהן ב- $x = a$ (נקודת הפיתול שלהן) אז $h_{(x)}$ מקבלת שם מינימום מקומי, ואם האחת עולה והשנייה יורדת אז $h_{(x)}$ מקבלת שם מקסימום מקומי.

כדוגמה ניקח $f_{(x)} = \sin x$ ו- $g_{(x)} = \tan x$. $h_{(x)} = \sin x \cdot \tan x$ בירוק מקווקו :



2. שימושי הנגזרת

מצא את הערכים של a, b ו-c בפונקציה $f(x)=\frac{x+a}{bx^2+cx+2}$ תוך שימוש בנתונים הבאים:

א. a, b ו-c יכולים לקבל ערכים של 0 או 1 בלבד.

ב. הגרף של *f(x)* עובר דרך הנקודה (-1,0).

ג. הקו y=1 אַסִימְפְּטוֹטִי לגרף של *f(x)*.

<u>הסבר את שיקוליך</u>.

פיתרון:

לפי כללי אצבע של מהנדסים ניתן לדעת מיד ש-

$a=1$ על מנת שיתאפס המונה כאשר $x=-1$ וכך יתקיים $f_{(-1)}=0$ (כנדרש בנתון ב').

$b=0$ אחרת "ינצח" המכנה את המונה והאסימפטוטה האופקית תהיה $y=0$ (לא תתקיים דרישה ג').

$c=1$ כדי ש"מנת המקדמים" תהיה 1 וכך האסימפטוטה האופקית תהיה $y=1$ (כנדרש בנתון ג').

כעת פורמאלית:

$$f_{(-1)}=0 \quad => \quad \frac{-1+a}{b(-1)^2+c(-1)+2}=0 \quad => \quad -1+a=0 \quad => \quad a=1$$

כדי שתתקיים דרישה ג' מוכרח להתקיים $lim_{x\to\infty} f_{(x)}=1$:

$$\lim_{x\to\infty} f_{(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{bx^2+cx+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{b+\frac{c}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{\lim_{x\to\infty} b+\lim_{x\to\infty}\frac{c}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}}=\frac{0^+}{b}=1$$

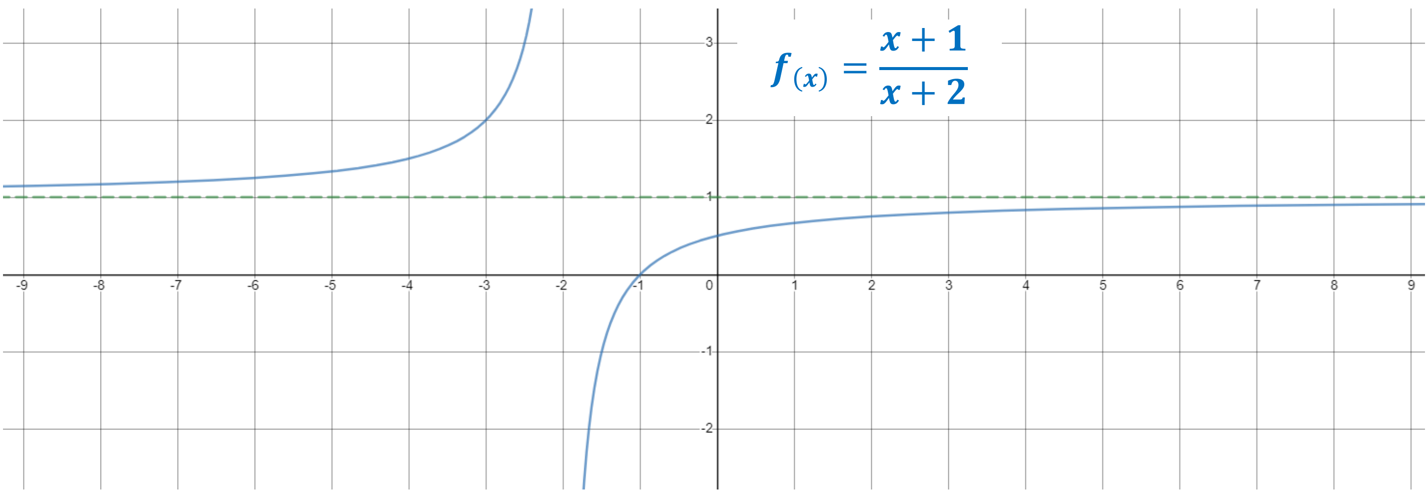
במצב זה התוצאה יכולה להיות 1 רק אם $b\to 0$ (מימין), אחרת $f_{(x)}\to 0$. יש לנו אם כך $f_{(x)}=\frac{x+1}{cx+2}$

$$\lim_{x\to\infty} f_{(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{cx+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{c+\frac{2}{x}}=\frac{\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}}{\lim_{x\to\infty}c+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}}=\frac{1}{c}=1 \quad => \quad c=1$$

שימו לב שלמרות הכותרת לא השתמשנו כאן באופרטור הגזירה. בעת מבחן יש לשאול את המרצה אם מותר הדבר.

אם אסור, נחשב את השורה האחרונה באמצעות כלל לופיטל כדי לצאת ידי חובה:

$$\lim_{x\to\infty} f_{(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{cx+2}=(Lop)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{c}=\frac{1}{c}=1 \quad => \quad c=1$$



3. המשפט היסודי

נתון: $f(x)=\int_0^x u(t)dt$ ו- $g(x)=\int_3^x u(t)dt$.

א. הראה כי $f(x)$ ו- $g(x)$ הן אנטי-נגזרת של *u(x)*. 10 נקודות

ב. מצא את *c* כך ש- *f(x)=g(x)+c* (בטא את *c* כאינטגרל מסוים של *u(t)*). 15 נקודות

פתרון א':

נגזור את $f_{(x)}$ ונראה שמתקבל $u_{(x)}$:

$$f_{(x)}=\int_0^x u_{(t)}dt \quad => \quad \frac{d}{dx}f_{(x)}=\frac{d}{dx}\int_0^x u_{(t)}dt = u_{(x)}$$

נגזור את $g_{(x)}$ ונראה שמתקבל $u_{(x)}$:

$$g_{(x)}=\int_3^x u_{(t)}dt \quad => \quad \frac{d}{dx}g_{(x)}=\frac{d}{dx}\int_3^x u_{(t)}dt = u_{(x)}$$

פתרון ב':

$$f_{(x)}=g_{(x)}+c \quad => \quad \int_0^x u_{(t)}dt=\int_3^x u_{(t)}dt+c \quad =>$$

$$=> \quad \int_0^3 u_{(t)}dt+\int_3^x u_{(t)}dt = \int_3^x u_{(t)}dt+c \quad => \quad \int_0^3 u_{(t)}dt=c$$

4. אינטגרציה בחלקים

תהי y(x) פונקציה כך ש- $y'(x) = \frac{\cos x}{x}$. כמו כן, $y_{(\pi/2)} = a$ ו- $y_{(3\pi/2)} = b$.

מצא את $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} y(x)\, dx$.

פיתרון:

$$\int y_{(x)} dx \quad => \quad \begin{cases} u = y_{(x)} & => \quad du = \frac{\cos x}{x} dx \\ dv = dx & => \quad v = x \end{cases}$$

$$\int u \cdot dv \quad = \quad u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\int y_{(x)} dx \; = \; x \cdot y_{(x)} - \int x \cdot \frac{\cos x}{x} dx$$

$$\int y_{(x)} dx \; = \; x \cdot y_{(x)} - \sin x$$

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} y_{(x)} dx \; = \; \left[x \cdot y_{(x)} - \sin x \right|_{\pi/2}^{3\pi/2} \; = \; \frac{3\pi}{2} \cdot y_{(3\pi/2)} - \sin\frac{3\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} \cdot y_{(\pi/2)} - \sin\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \; \frac{3\pi}{2} \cdot y_{(3\pi/2)} - \sin\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \cdot y_{(\pi/2)} + \sin\frac{\pi}{2} \; = \; \frac{\pi}{2}\left(3y_{(3\pi/2)} - y_{(\pi/2)}\right) + 2$$

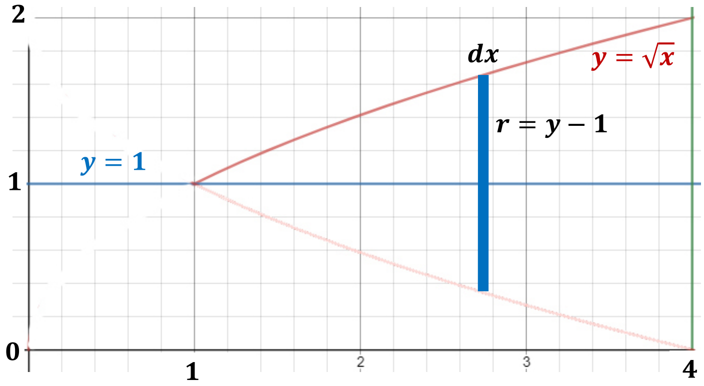
נציב כעת את הנתונים $y_{(\pi/2)} = a$ ו- $y_{(3\pi/2)} = b$:

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} y_{(x)} dx \; = \; \frac{\pi}{2}(3b - a) + 2$$

5. שימושי האינטגרל – חישוב נפח

מצא את נפח הגוף הנוצר על ידי סיבוב התחום הכלוא בין $y=\sqrt{x}$, y=1 ו- x=4 סביב הישר y=1 תוך שימוש בשיטת הדיסקות (10 נקו') ובשיטת הקליפות הגליליות (15 נקו').

<u>פיתרון בדיסקות:</u>



$$dV = \pi r^2 dx = \pi(y-1)^2 dx =$$

$$= \pi\left(\sqrt{x}-1\right)^2 dx$$

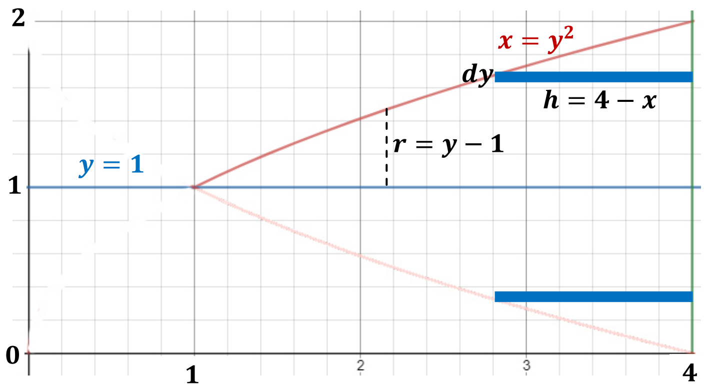
$$dV = \pi\left(x - 2\sqrt{x} + 1\right)dx$$

$$V = \pi\int_1^4 \left(x - 2\sqrt{x} + 1\right)dx =$$

$$= \pi\left[\frac{x^2}{2} - \frac{4}{3}x^{3/2} + x\right|_1^4 =$$

$$= \pi\left[8 - \frac{32}{3} + 4 - \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3} + 1\right)\right] = \frac{7\pi}{6} \ \textit{Cubic Units}$$

<u>פיתרון בקליפות:</u>



$$dV = 2\pi r h dy = 2\pi(y-1)(4-x)dy =$$

$$= 2\pi(y-1)(4-y^2)dy$$

$$dV = -2\pi(y^3 - y^2 - 4y + 4)dy$$

$$V = -2\pi\int_1^2 (y^3 - y^2 - 4y + 4)dy =$$

$$= -2\pi\left[\frac{y^4}{4} - \frac{y^3}{3} - 2y^2 + 4y\right|_1^2 =$$

$$= -2\pi\left[4 - \frac{8}{3} - 8 + 8 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} - 2 + 4\right)\right] = \frac{7\pi}{6} \ \textit{Cubic Units}$$