אינטגרל לא אמיתי (Improper Integral) **סוג I** הוא אינטגרל עם גבולות אינטגרציה אינסופיים:

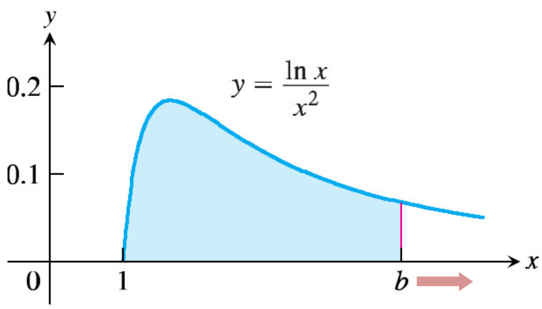
1) אם $f_{(x)}$ רציפה ב- $[a,\infty)$, אזי: $\int_a^{\infty} f_{(x)}dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f_{(x)}dx$

2) אם $f_{(x)}$ רציפה ב- $(-\infty,b]$, אזי: $\int_{-\infty}^{b} f_{(x)}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f_{(x)}dx$

3) אם $f_{(x)}$ רציפה ב- $(-\infty,\infty)$, אזי: $\int_{-\infty}^{\infty} f_{(x)}dx = \int_{-\infty}^{c} f_{(x)}dx + \int_{c}^{\infty} f_{(x)}dx$ **C מספר ממשי כלשהו.**

אם מתקבל גבול סופי נאמר שהאינטגרל מתכנס ושווה לערך הגבול. אם הגבול אינו קיים (אינסופי) נאמר שהאינטגרל מתבדר.

דוגמה מהספר (עמ' 620 מהדורה 11) לאינטגרל לא אמיתי **סוג I** (1):



האם השטח שמתחת לגרף הפונק' $y = \frac{\ln x}{x^2}$ בתחום $1 < x < \infty$ הינו סופי?
אם כן מהו ערכו?
נבצע אינטגרציה בתחום $1 < x < b$ ואז נשאיף את b לאינסוף.
אם יתקבל גבול סופי, ז"א אם $\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{\ln x}{x^2}dx \neq \infty$, אזי האינטגרל מתכנס
והתשובה היא שהשטח הינו סופי ושווה בערכו לגבול שהתקבל.
אם יתקבל גבול אינסופי, האינטגרל מתבדר והשטח המדובר הינו אינסופי.

$$\int_1^b \frac{\ln x}{x^2}dx = \boxed{\begin{matrix} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow v = -\frac{1}{x}\end{matrix}} = \left[-\frac{1}{x}\cdot \ln x\right]_1^b - \int_1^b\left(-\frac{dx}{x^2}\right) = \left[-\frac{1}{x}\cdot\ln x - \frac{1}{x}\right]_1^b = \left[-\frac{1}{x}(\ln x + 1)\right]_1^b =$$

$$= -\frac{1}{b}(\ln b + 1) - (-1) = 1 - \frac{1}{b}(\ln b + 1) \rightarrow \int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{\ln x}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left[1 - \frac{1}{b}(\ln b + 1)\right] = 1$$

התקבל גבול סופי שערכו 1 וזהו לכן ערכו של השטח המדובר.

דוגמה נוספת מהספר (עמ' 625) לאינטגרל לא אמיתי **סוג I** (1): חשב את $\int_2^{\infty}\frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}dx$

ראשית נפרק את האינטגרנד לשברים חלקיים:

$$\frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \Rightarrow x+3 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1) \Rightarrow x+3 = (A+B)x^2 + (C-B)x + A - C$$

כעת נשווה מקדמים: $\mathbf{A - C = 3}$ $\mathbf{C - B = 1}$ $\mathbf{A + B = 0}$, נפתור את המשוואות ונקבל $\mathbf{A = 2}$, $\mathbf{B = -2}$, $\mathbf{C = -1}$

נרשום את האינטגרל מחדש ונפתור אותו:

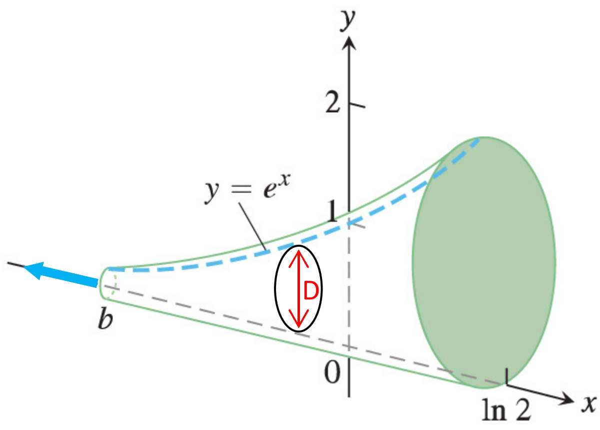
$$\int_2^{\infty}\frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}dx = \int_2^{\infty}\left(\frac{2}{x-1} + \frac{-2x-1}{x^2+1}\right)dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^b\left(\frac{2}{x-1} - \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[2\ln|x-1| - \ln(x^2+1) - arctg(x)\right]_2^b = \lim_{b\to\infty}\left[\ln\frac{(x-1)^2}{(x^2+1)} - arctg(x)\right]_2^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\ln\frac{(b-1)^2}{(b^2+1)} - arctg(b) - \ln\frac{1}{5} + \mathrm{arctg}2\right] = \ln 1 - arctg(\infty) + \ln 5 + arctg2 =$$

$$= 0 - \frac{\pi}{2} + \ln 5 + arctg2 \approx 1.1458$$

דוגמה מהספר (עמ' 626) לאינטגרל לא אמיתי **מסוג I** (2) - חישוב נפחו של שופר בעל אורך אינסופי.



החתך של השופר הוא דסקה מקבילה לציר y אשר קוטרה נמצא בין ציר X לגרף הפונק' $y = e^x$, $-\infty < x \le ln2$. מהו נפח השופר?
נפחה של כל דסקה שווה למכפלת שטחה πr^2 בעובייה dx :

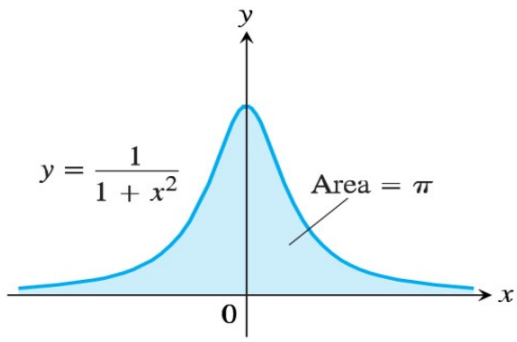
$$dV = \pi r^2 dx = \pi (\tfrac{D}{2})^2 dx = \pi \tfrac{D^2}{4} dx = \tfrac{\pi}{4} \cdot y^2 dx = \tfrac{\pi}{4} \cdot e^{2x} dx$$

נפח של אינסוף דסקות כאלה יתקבל מאינטגרציה על פני התחום [b,ln2]:

$$V_{(b)} = \frac{\pi}{4} \int_b^{ln2} e^{2x} dx = \frac{\pi}{8} \cdot [e^{2x}]\begin{matrix} \ln2 \\ \mathrm{b} \end{matrix} = \frac{\pi}{8} \cdot [4 - e^{2b}]$$

$V = \frac{\pi}{8} \lim_{b \to -\infty} [4 - e^{2b}] = \frac{\pi}{2}$ של שופר אינסופי

דוגמה מהספר (עמ' 621) לאינטגרל לא אמיתי **מסוג I** (3):



האם השטח שמתחת לגרף הפונק' $y = \frac{1}{1+x^2}$ בתחום $-\infty < x < \infty$ הינו סופי?
אם כן מהו ערכו?
נבצע אינטגרציה בתחום $-\boldsymbol{a} \le x \le 0$ ונשאיף את a ל- $-\infty$.
אם יתקבל גבול סופי הריהו שווה לחצי השמאלי של השטח המדובר.
אח"כ נבצע אינטגרציה בתחום $\boldsymbol{0} \le x \le \boldsymbol{b}$ ונשאיף את b ל- $+\infty$.
אם יתקבל גבול סופי הריהו שווה לחצי הימני של השטח המדובר.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 \frac{1}{1+x^2} \mathrm{dx} = \lim_{a \to -\infty} [\mathrm{arctg(x)}]_a^0 = \lim_{a \to -\infty} [\mathrm{arctg}(0) - arctg(a)] = 0 - arctg(-\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \to \infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} \mathrm{dx} = \lim_{b \to \infty} [\mathrm{arctg(x)}]_0^b = \lim_{b \to \infty} [\mathrm{arctg(b)} - arctg(0)] = arctg(\infty) - 0 = \frac{\pi}{2}$$

השטח המדובר הינו סופי וערכו π

יכולנו גם לנצל את העובדה ש- $\frac{1}{1+x^2}$ היא פונקציה זוגית (ז"א סימטרית על ציר y) ולקחת פעמיים את אחד האינטגרלים הנ"ל:

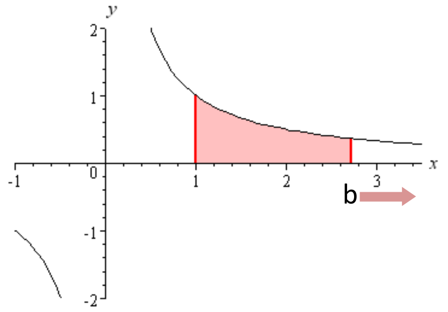
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

דרך אחרת בה יכולנו לנקוט היא לכתוב זאת כך:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{t \to \infty} \int_{-t}^{t} \frac{1}{1+\mathrm{x}^2} \mathrm{dx} = \lim_{t \to \infty} [\mathrm{arctg(x)}]_{-\mathrm{t}}^{\mathrm{t}} = \lim_{t \to \infty} [\mathrm{arctg(t)} - arctg(-t)] =$$

$$= \lim_{t \to \infty} [\mathrm{arctg(t)} + arctg(t)] = 2 \cdot \lim_{t \to \infty} [\mathrm{arctg(t)}] = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

האינטגרל הלא אמיתי **מסוג I**: $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ **מתכנס רק אם P >1**



באיור שמשמאל p=1 כך שהאינטגרל מתבדר והשטח הוורוד שמתחת לגרף שואף לאינסוף כאשר $x \to \infty$.
אם P >1 הפונקציה קטנה מספיק מהר כאשר X גדל והשטח הוורוד שואף לערך סופי.
אם $P \le 1$ הפונקציה קטנה לאט מדי כאשר X גדל והאינטגרל מתבדר, ז"א השטח שואף לאינסוף.

נוכיח קודם כל שכאשר p=1 האינטגרל מתבדר:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty}[\ln(x)]_1^b = \lim_{b\to\infty}[\ln(b)-\ln(1)] = \ln(\infty)-0 = \infty$$

כעת נבדוק עבור $p\neq1$:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^p}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-p}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^b = \frac{1}{-p+1}\cdot\lim_{b\to\infty}[x^{-p+1}]_1^b =$$

$$= \frac{1}{-p+1}\cdot\lim_{b\to\infty}[b^{-p+1}-1] = C\cdot\lim_{b\to\infty}[b^{-p+1}-1]$$

עבור $P<1$ החזקה של **b** חיובית, לכן $C\cdot\lim_{b\to\infty}[b^{-p+1}-1] = C\cdot\left(\infty^{\text{חיובי}}-1\right) = \infty$ והאינטגרל מתבדר.

עבור P >1 החזקה של **b** שלילית, לכן $C\cdot\lim_{b\to\infty}[b^{-p+1}-1] = C\cdot\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{b^{p-1}}-1\right] = C\cdot\left[\frac{1}{\infty^{\text{חיובי}}}-1\right] = -C$
והאינטגרל מתכנס לערך **C–** , ז"א השטח שמתחת לגרף שואף לערך $\frac{1}{p-1}$ כאשר $x\to\infty$.
ככל ש-**P** גדול יותר השטח שמתחת לגרף שואף לערך קטן יותר כאשר $x\to\infty$, כצפוי, מפני שהפונקציה קטנה מהר יותר.

שאלה: האם $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1.5}}$ מתכנס? אם כן, לאיזה ערך?

תשובה: כן, כי החזקה של X גדולה מ-1. ע"פ הנוסחה שפותחה לעיל אינטגרל זה מתכנס לערך $2 = \frac{1}{1.5-1} = \frac{1}{p-1}$

אינטגרל לא אמיתי **מסוג II** הוא אינטגרל של פונקציה אשר הופכת לאינסופית בנקודה כלשהי באינטרוול האינטגרציה:

1) אם $f_{(x)}$ רציפה ב- $(a,b]$ ואינה רציפה ב- a (אס' אנכית בקצה השמאלי) אזי: $\int_a^b f_{(x)}dx = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f_{(x)}dx$

2) אם $f_{(x)}$ רציפה ב- $[a,b)$ ואינה רציפה ב- b (אס' אנכית בקצה הימני) אזי: $\int_a^b f_{(x)}dx = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f_{(x)}dx$

3) אם $f_{(x)}$ רציפה ב- $[a,b]$ למעט ב- c $(a<c<b)$ (אס' אנכית באמצע) אזי: $\int_a^b f_{(x)}dx = \int_a^c f_{(x)}dx + \int_c^b f_{(x)}dx$

אם מתקבל גבול סופי נאמר שהאינטגרל מתכנס ושווה לערך הגבול. אם הגבול אינו קיים (אינסופי) נאמר שהאינטגרל מתבדר.

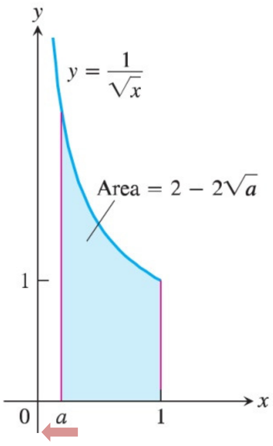
דוגמה מהספר (עמ' 623) לאינטגרל לא אמיתי **מסוג II** (1):

האם $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ מתכנס?

האינטגרנד רציף ב- $(0,1]$ אבל לא ב- x=0 והופך אינסופי כאשר $x\to 0^+$. ע"פ (1) נחשב זאת כך:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\cdot lim_{a\to 0^+}\left[\sqrt{x}\right]_a^1 = 2\cdot lim_{a\to 0^+}\left[1-\sqrt{a}\right] = 2$$

הגבול סופי כך שהאינטגרל מתכנס. ניתן לומר שהגרף מתקרב לאסימפטוטה x=0 "מספיק מהר".



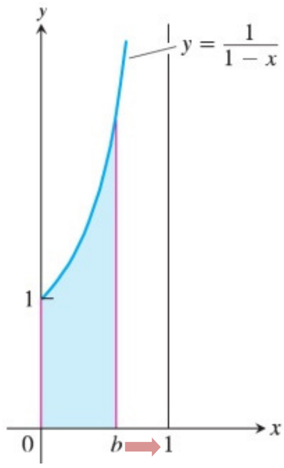
דוגמה מהספר (עמ' 624) לאינטגרל לא אמיתי **מסוג II** (2):

האם $\int_0^1 \frac{1}{1-x}dx$ מתכנס?

האינטגרנד רציף ב- $[0,1)$ אבל לא ב- x=1 והופך אינסופי כאשר $x\to 1^-$. ע"פ (2) נחשב זאת כך:

$$lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{1}{1-x}dx = -\lim_{b\to 1^-}\left[ln|x-1|\right]_0^b = -\lim_{b\to 1^-}\left[ln|b-1|-0\right] = -ln|0^-| = -(-\infty) = \infty$$

הגבול אינסופי כך שהאינטגרל מתבדר. ניתן לומר שהגרף מתקרב לאסימפטוטה x=1 "לאט מדי".



דוגמה מהספר (עמ' 624) לאינטגרל לא אמיתי **מסוג II** (3): **חשב את** $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$

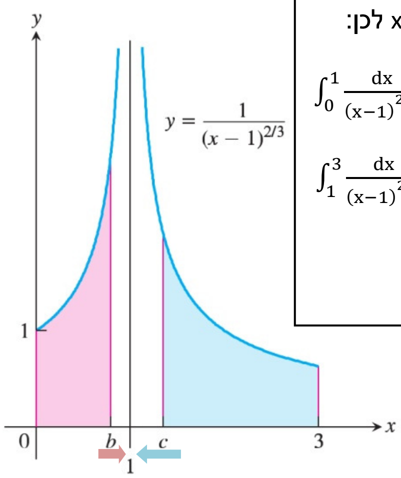
האינטגרנד רציף ב- $[0,3]$ למעט x=1, לכן ע"פ (3) נרשום: $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$

האינטגרנד רציף ב- $[0,1)$ והופך איסופי כאשר $x\to 1^-$ וכמו כן רציף ב- $(1,3]$ והופך איסופי כאשר $x\to 1^+$ לכן:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = 3\cdot\lim_{b\to 1^-}\left[(x-1)^{1/3}\right]_0^b = 3\cdot\lim_{b\to 1^-}\left[(b-1)^{1/3}+1\right] = 3$$

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{c\to 1^+}\int_c^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = 3\cdot\lim_{c\to 1^+}\left[(x-1)^{1/3}\right]_c^3 = 3\cdot\lim_{c\to 1^+}\left[2^{1/3}-(c-1)^{1/3}\right] = 3\cdot 2^{1/3}$$

אנו מסיקים ש- $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = 3 + 3\cdot 2^{1/3}$



דוגמה נוספת מהספר (עמ' 626) לאינטגרל לא אמיתי **מסוג II** (3) : חשב את $\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$

לאינטגרנד יש אס' אנכית ב- x=1 אשר נמצא בתחום האינטגרציה ולכן האינטגרל אינו אמיתי.

נתעלם מכך לרגע ונפתור אותו **בטעות** כאינטגרל אמיתי: $\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = ln|x-1|\,\Big|_0^3 = ln2 - ln|-1| = ln2$

כעת נפתור אותו כהלכה: $\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^3 \frac{dx}{x-1}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-1} = \lim_{b\to1^-}\int_0^b \frac{dx}{x-1} = \lim_{b\to1^-} ln|x-1|\,\Big|_0^b = \lim_{b\to1^-}[ln|b-1| - ln|-1|] = \lim_{b\to1^-}[ln|b-1|] = ln|0^-| = -\infty$$

האינטגרל $\int_0^1 \frac{dx}{x-1}$ מתבדר, ומכיוון שהוא מוכל באינטגרל $\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$ ברור שאף הוא מתבדר.
התוצאה *ln2* שקיבלנו קודם שגויה אם כן, ואנו מסיקים כי תמיד יש לבחון תחילה את רציפות האינטגרנד בתחום האינטגרציה.
רק אם האינטגרנד אכן רציף בתחום האינטגרציה, האינטגרל אמיתי ומותר לנו לחשב אותו "כרגיל".

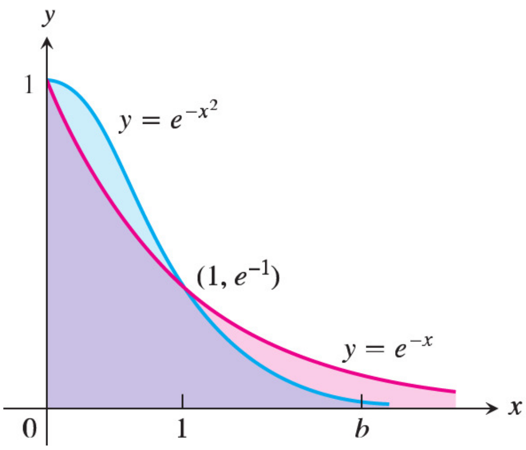
<u>מבחנים להתכנסות ולהתבדרות</u>

כשאנו מתקשים לחשב אינטגרל לא אמיתי, אנו מנסים לקבוע ראשית אם הוא מתכנס או מתבדר.
אם הוא מתבדר אז זהו זה. אם הוא מתכנס, אנו יכולים לבצע אומדן של ערכו באמצעות שיטות נומריות.
השיטות העיקריות לקביעת התכנסות או התבדרות של אינטגרל הן **מבחן ההשוואה הישירה ומבחן השוואת הגבול**.

האם האינטגרל $\int_1^\infty \mathbf{e^{-x^2}dx}$ מתכנס? נשתמש במבחן ההשוואה הישירה:
איננו יודעים לפתור אינטגרל זה, אבל אם $\int_1^\infty \mathbf{e^{-x}dx}$ מתכנס אז התשובה
לשאלה היא כן, מפני ש בתחום הרלוונטי $\mathbf{e^{-x^2}} \le \mathbf{e^{-x}}$ (ז"א $\mathbf{e^{-x}}$ מהווה "גג").

$$\int_1^\infty \mathbf{e^{-x}dx} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \mathbf{e^{-x}dx} = -\lim_{b\to\infty}[\mathbf{e^{-x}}]_1^b = -\lim_{b\to\infty}[\mathbf{e^{-b}} - e^{-1}] = \frac{1}{e}$$

$\int_1^\infty \mathbf{e^{-x}dx}$ אכן מתכנס, ולפיכך $\int_1^\infty \mathbf{e^{-x^2}dx}$ מתכנס אף הוא לערך חיובי
כלשהו, לבטח קטן מ- $\frac{1}{e}$.



* האם $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\mathbf{dx}$ מתכנס? כן, כי אפילו $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\mathbf{dx}$ מתכנס, ו- $\frac{1}{x^2}$ מהווה גג ל- $\frac{\sin^2 x}{x^2}$ (בכתיב רשמי: $\frac{\sin^2 x}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$).

* האם $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2-0.1}}\mathbf{dx}$ מתבדר? כן, כי אפילו $\int_1^\infty \frac{1}{x}\mathbf{dx}$ מתבדר, ו- $\frac{1}{x}$ מהווה "רצפה" ל- $\frac{1}{\sqrt{x^2-0.1}}$ (בכתיב רשמי: $\frac{1}{x} \le \frac{1}{\sqrt{x^2-0.1}}$).

* הראה כי $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+x}}\mathbf{dx}$ מתכנס לערך נמוך מ- 4.

זהו אינטגרל לא אמיתי הן מסוג **I** (גבול עליון) והן מסוג **II** (אסימפטוטה משמאל).

נפצל אותו לשני אינטגרלים: $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+x}}\mathbf{dx} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^3+x}}\mathbf{dx} + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+x}}\mathbf{dx}$

עבור התחום $\mathbf{0} < x \le \mathbf{1}$ מתקיים $\frac{1}{\sqrt{x^3+x}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$, ז"א $\frac{1}{\sqrt{x}}$ מהווה "גג" ל- $\frac{1}{\sqrt{x^3+x}}$. נחשב את השטח שתחת ה"גג" עבור תחום זה:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathbf{dx} = \boldsymbol{lim_{a\to0^+}} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\boldsymbol{dx} = \mathbf{2}\cdot\boldsymbol{lim_{a\to0^+}}[\sqrt{x}]_a^1 = \mathbf{2}\cdot\boldsymbol{lim_{a\to0^+}}[\mathbf{1}-\sqrt{a}] = \mathbf{2} \qquad \Rightarrow \qquad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^3+x}}\mathbf{dx} < 2$$

בתחום $\mathbf{1} \le x < \infty$ ממשיך אומנם $\frac{1}{\sqrt{x}}$ להוות "גג" ל- $\frac{1}{\sqrt{x^3+x}}$, אבל כאן זהו "גג" גבוה מדי ועלינו להחליפו באחר נמוך יותר.

נבחר אם כן ב- $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ כ"גג" חלופי, נמוך יותר. הוכחנו כבר בעבר כי $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1.5}} = \mathbf{2}$ כך שלבטח מתקיים $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+x}}\mathbf{dx} < 2$.

לסיכום: $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+x}}\mathbf{dx} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^3+x}}\mathbf{dx} + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+x}}\mathbf{dx} < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathbf{dx} + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}}\mathbf{dx} = \mathbf{2+2=4}$

ניתן לשאול מדוע לא בחרנו ב- $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ כ"גג" גם עבור התחום $\mathbf{0} < x \le 1$.

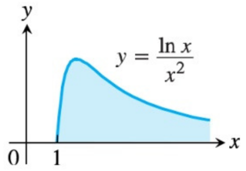
תשובה: הוא מתקרב לאסימפטוטה X=0 לאט מדי ומהווה לכן בחירה רעה עבור התחום $0 < x \le 1$ (מתקרב לאט מדי <= האינטגרל שלו מתבדר), .

האינטגרלים הלא אמיתיים לסוגיהם - סיכום

גבולות אינטגרציה אינסופיים (סוג **I**)

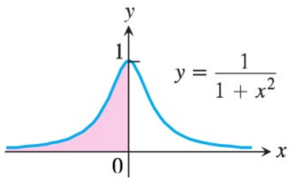
1. גבול עליון

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\,dx$$



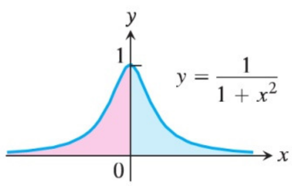
2. גבול תחתון

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{dx}{1+x^2}$$



3. שני הגבולות

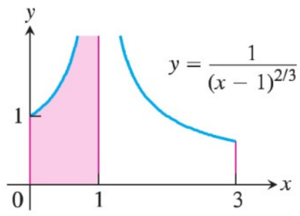
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to-\infty}\int_b^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{c\to\infty}\int_0^c \frac{dx}{1+x^2}$$



אסימפטוטה אנכית (סוג **II**)

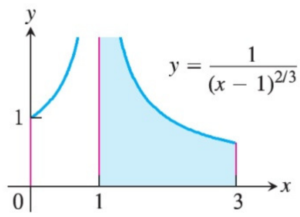
4. אסימפטוטה מימין

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{b\to1^-}\int_0^b \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$



5. אסימפטוטה משמאל

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{d\to1^+}\int_d^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$



6. אסימפטוטה באמצע

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$