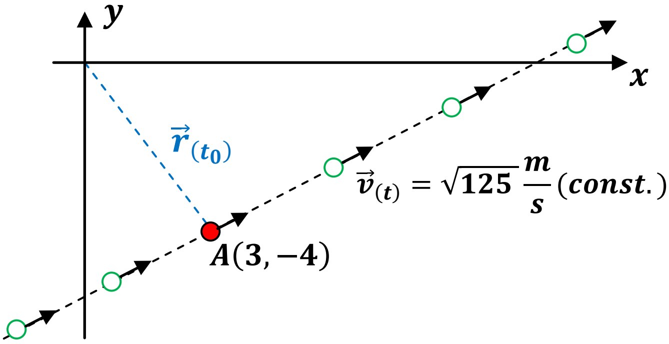
1. שימושי הנגזרת

חלקיק מתרחק מהראשית במהירות של 10 מטרים לשנייה על ציר *x* ובמהירות של 5 מטרים לשנייה על ציר *y*. באיזו מהירות הוא מתרחק מהראשית כאשר הוא חולף דרך הנקודה A(3,-4)?
נתון כי *x(t)* ו- *y(t)* הן פונקציות גזירות לכל *t*.

<u>פיתרון:</u>



$$r^2_{(x,y)} = x^2_{(t)} + y^2_{(t)}$$

$$\frac{d}{dt}\left[r^2_{(x,y)}\right] = \frac{d}{dt}\left[x^2_{(t)} + y^2_{(t)}\right] = \frac{d}{dt}\left[x^2_{(t)}\right] + \frac{d}{dt}\left[y^2_{(t)}\right]$$

$$2r_{(x,y)} \cdot \frac{dr_{(t)}}{dt} = 2x_{(t)} \cdot \frac{dx_{(t)}}{dt} + 2y_{(t)} \cdot \frac{dy_{(t)}}{dt}$$

$$r_{(x,y)} \cdot \frac{dr_{(t)}}{dt} = x_{(t)} \cdot \frac{dx_{(t)}}{dt} + y_{(t)} \cdot \frac{dy_{(t)}}{dt}$$

$$r_{(3,-4)} \cdot \frac{dr_{(t_0)}}{dt} = x_{(t_0)} \cdot \frac{dx_{(t_0)}}{dt} + y_{(t_0)} \cdot \frac{dy_{(t_0)}}{dt}$$

$$5 \cdot \frac{dr_{(t_0)}}{dt} = 3 \cdot 10 + (-4) \cdot 5 \quad => \quad \frac{dr_{(t_0)}}{dt} = 2\ m/s$$

לו ידענו מהם x_0 ו- y_0 היינו יכולים:

א) לחשב באיזה רגע t_0 חלף החלקיק דרך הנקודה A(3,-4) .

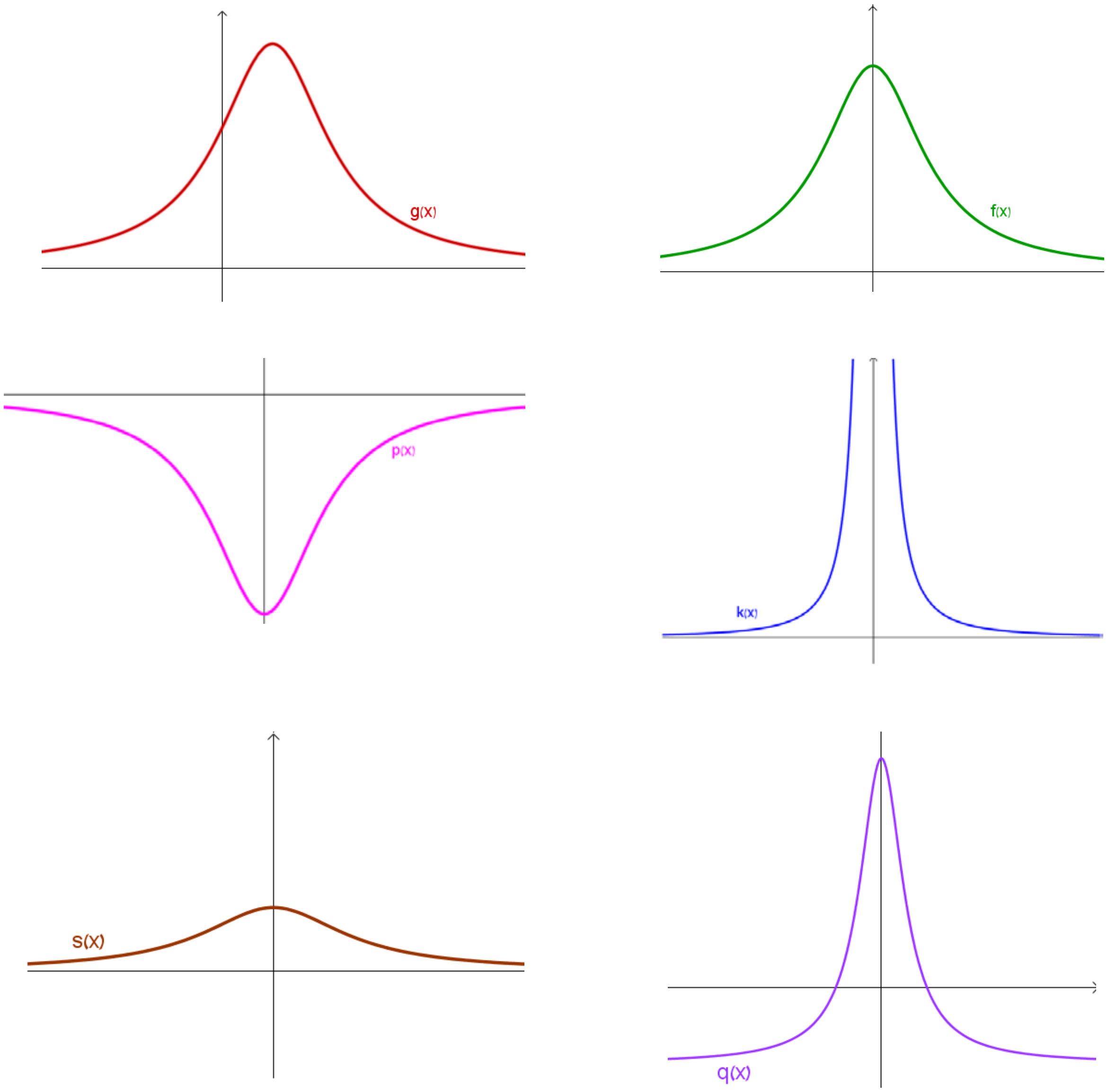
ב) לנסח את מרחק החלקיק מהראשית $r_{(t)}$ כתלות בזמן t כדלקמן, ואז לגזור לפי t ולהציב בנגזרת את t_0.

$$\begin{cases} x_{(t)} = 10t + x_0 \\ y_{(t)} = 5t + y_0 \end{cases} \quad => \quad r^2_{(t)} = x^2_{(t)} + y^2_{(t)} \quad => \quad r_{(t)} = \sqrt{x^2_{(t)} + y^2_{(t)}}$$

2. חקירת פונקציה

נתונה הפונקציה $h_{(x)} = \frac{6}{x^2+3a^2}$ כאשר $a \neq 0$

א. הסבר ללא חקירה פורמאלית מי מבין ששת הגרפים הבאים יכול לתאר את $h_{(x)}$. (8 נקו')



ב. הסבר ללא חקירה פורמאלית מהי נקודת הקיצון של *h(x)* (באמצעות *a*) וסווג אותה (6 נקו').

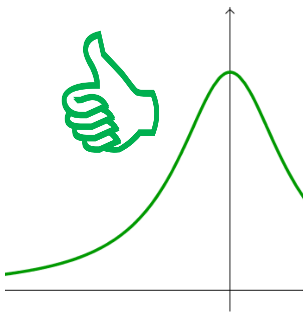
ג. מהן נקודות הפיתול של *h(x)* (בטא באמצעות *a*)? מותר לחקור פורמאלית בסעיף זה (6 נקו').

ד. האם ישנן ל- *h(x)* אסימפטוטות? הסבר ללא חקירה פורמאלית (5 נקו').

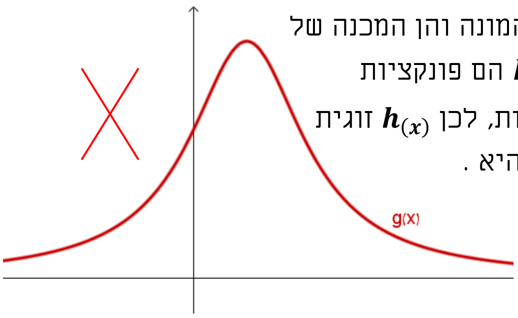
פיתרון:

א. $h_{(x)}=\frac{6}{x^2+3a^2}$ $\quad a\neq 0$ (8 נקו')

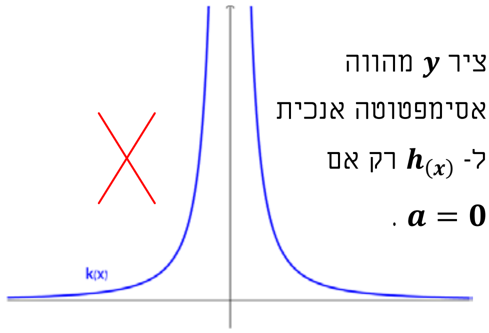
המכנה של $h_{(x)}$ הוא פרבולה "מחייכת", זוגית וחיובית לכל x, והמונה הוא פונקציה קבועה, זוגית וחיובית, לכן $h_{(x)}$ זוגית, חיובית לכל x, ומקבלת מקסימום כאשר $x=0$.



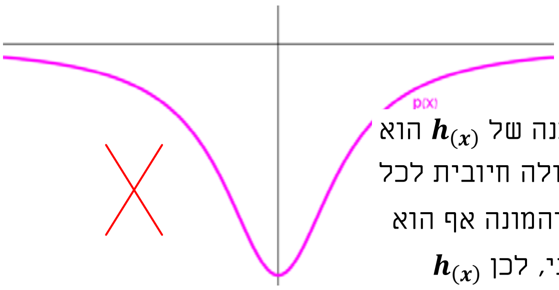
הן המונה והן המכנה של $h_{(x)}$ הם פונקציות זוגיות, לכן $h_{(x)}$ זוגית אף היא .



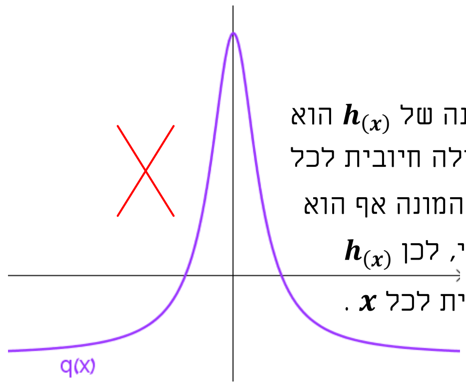
ציר y מהווה אסימפטוטה אנכית ל- $h_{(x)}$ רק אם $a=0$.



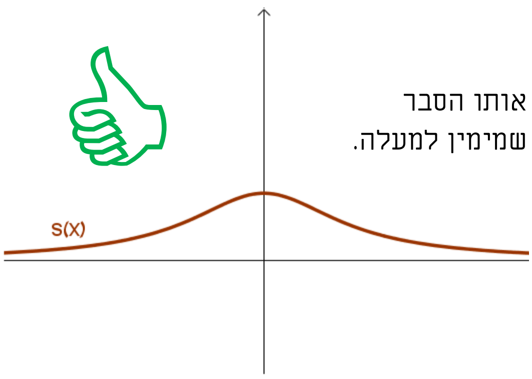
המכנה של $h_{(x)}$ הוא פרבולה חיובית לכל x , והמונה אף הוא חיובי, לכן $h_{(x)}$ חיובית לכל x .



המכנה של $h_{(x)}$ הוא פרבולה חיובית לכל x , והמונה אף הוא חיובי, לכן $h_{(x)}$ חיובית לכל x .



אותו הסבר שמימין למעלה.



ב. נקודות הקיצון של $h_{(x)} = \frac{6}{x^2+3a^2}$ $a \neq 0$ וסיווגן:

המכנה של $h_{(x)}$ הוא פרבולה "מחייכת" וזוגית (וחיובית לכל x), על כן הוא מינימאלי (וחיובי) בנקודה $(0, 3a^2)$.

המונה של $h_{(x)}$ קבוע, ואם כך $h_{(x)}$ מקסימאלית כאשר המכנה שלה מינימאלי: $max\left(0, \frac{2}{a^2}\right)$.

לשם וידוא, נחקור פורמאלית:

$$h_{(x)} = \frac{6}{x^2+3a^2} \quad => \quad h'_{(x)} = -6\frac{2x}{(x^2+3a^2)^2} > 0 \quad => \quad x < 0$$

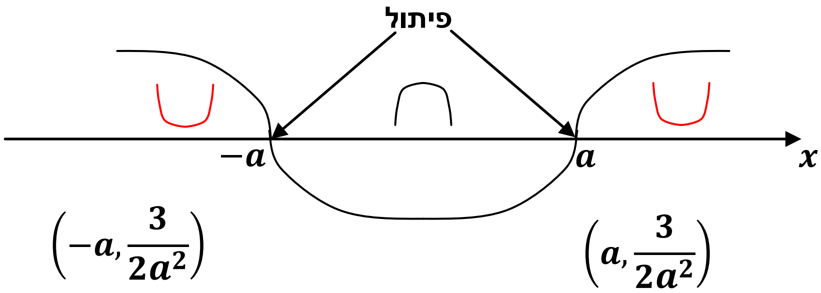
$$\begin{cases} x < 0 \ \ ascend \\ 0 < x \ \ decend \end{cases} \quad => \quad \left(0, \frac{2}{a^2}\right) max.$$

ג. נקודות הפיתול של $h_{(x)} = \frac{6}{x^2+3a^2}$ $a \neq 0$ (מותר לחקור פורמאלית בסעיף זה) (6 נקו'):

$$h'_{(x)} = -12\frac{x}{(x^2+3a^2)^2} \quad => \quad h''_{(x)} = -12\frac{(x^2+3a^2)^2 - 4x^2(x^2+3a^2)}{(x^2+3a^2)^4} =$$

$$= -12\frac{x^2+3a^2-4x^2}{(x^2+3a^2)^3} = -12\frac{3a^2-3x^2}{(x^2+3a^2)^3} = 36\frac{x^2-a^2}{(x^2+3a^2)^3} = 36\frac{(x+a)(x-a)}{(x^2+3a^2)^3}$$

$$h''_{(x)} > 0 \quad => \quad 36\frac{(x+a)(x-a)}{(x^2+3a^2)^3} > 0 \quad => \quad (x+a)(x-a) > 0$$



ד. אסימפטוטות ל- $h_{(x)} = \frac{6}{x^2+3a^2}$ $a \neq 0$ (5 נקו'):

אסימפטוטות אנכיות ברור שאין מכיוון ש- $h(x)$ מוגדרת לכל x .

אסימפטוטה אופקית: $y = 0$, מכיוון שכאשר $x \to \pm\infty$ המכנה גדל לאינסוף בעוד המונה קבוע.

3. המשפט היסודי

מצא את משוואת המשיק ל- $f_{(x)} = 2 - \int_2^{x+1} \frac{9}{1+t} dt$ בנקודה x=1 בשתי דרכים:

א. שימוש במשפט היסודי של החשבון האינטגרלי (20 נקו').

ב. פתרון האינטגרל (5 נקו').

<u>פיתרון</u>

א' – באמצעות שימוש במשפט היסודי

שלב 1 – מציאת שיפוע המשיק בנקודה $x = 1$

$$f_{(x)} = 2 - \int_2^{x+1} \frac{9}{1+t} dt \quad => \quad \frac{d}{dx} f_{(x)} = \frac{d}{dx}\left[2 - \int_2^{x+1} \frac{9}{1+t} dt\right] \quad =>$$

$$=> \frac{df_{(x)}}{dx} = -\frac{d}{dx}\int_2^{x+1} \frac{9}{1+t} dt \quad => \quad \frac{df_{(x)}}{dx} = -\frac{d}{du}\int_2^{u} \frac{9}{1+t} dt \cdot \frac{du}{dx} \quad =>$$

$$=> \quad \frac{df_{(x)}}{dx} = -\frac{9}{1+u} \cdot 1 \quad => \quad \frac{df_{(x)}}{dx} = -\frac{9}{1+x+1} \quad => \quad f'_{(x)} = -\frac{9}{x+2}$$

$$m_{\text{משיק}} = f'_{(1)} = -\frac{9}{1+2} = -3$$

שלב 2 – מציאת נקודה על המשיק (נקודת ההשקה, מן הסתם)

$$f_{(1)} = 2 - \int_2^{1+1} \frac{9}{1+t} dt = 2 - 0 = 2 \quad => \quad (1,2)\ is\ the\ tangence\ point$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad => \quad y - 2 = -3(x-1) \quad => \quad y = -3x + 5$$

ב' – באמצעות פיתרון ישיר של האינטגרל

$$f_{(x)} = 2 - \int_2^{x+1} \frac{9}{1+t} dt = 2 - 9ln(t+1)\Big|_2^{x+1} = 2 - 9ln\frac{x+2}{3}$$

שלב 1 – מציאת שיפוע המשיק בנקודה $x = 1$

$$f_{(x)} = 2 - 9ln\frac{x+2}{3} \quad => \quad f'_{(x)} = -9\frac{3}{x+2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{-9}{x+2} \quad => \quad m_{\text{משיק}} = f'_{(1)} = -3$$

שלב 2 – מציאת נקודה על המשיק (גם כאן, מן הסתם, תהא זו נקודת ההשקה)

$$f_{(1)} = 2 - 9ln\frac{1+2}{3} = 2 \quad => \quad (1,2)\ is\ the\ tangence\ point$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad => \quad y - 2 = -3(x-1) \quad => \quad y = -3x + 5$$

4. אינטגרציה על ידי הצבה

אם f היא פונקציה רציפה, מצא את הערך של האינטגרל $I=\int_0^a \frac{f_{(x)}}{f_{(x)}+f_{(a-x)}}dx$ על ידי ההצבה $u=a-x$ והוספת התוצאה שקיבלת לערך של I .

<u>פיתרון:</u>

$$u=a-x \quad => \quad \begin{cases} du=-dx \\ x=a-u \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 & \rightarrow & u=a \\ x=a & \rightarrow & u=0 \end{cases}$$

$$I=\int_0^a \frac{f_{(x)}}{f_{(x)}+f_{(a-x)}}dx \;=\; -\int_a^0 \frac{f_{(a-u)}}{f_{(a-u)}+f_{(u)}}du \;=\; \int_0^a \frac{f_{(a-u)}}{f_{(a-u)}+f_{(u)}}du$$

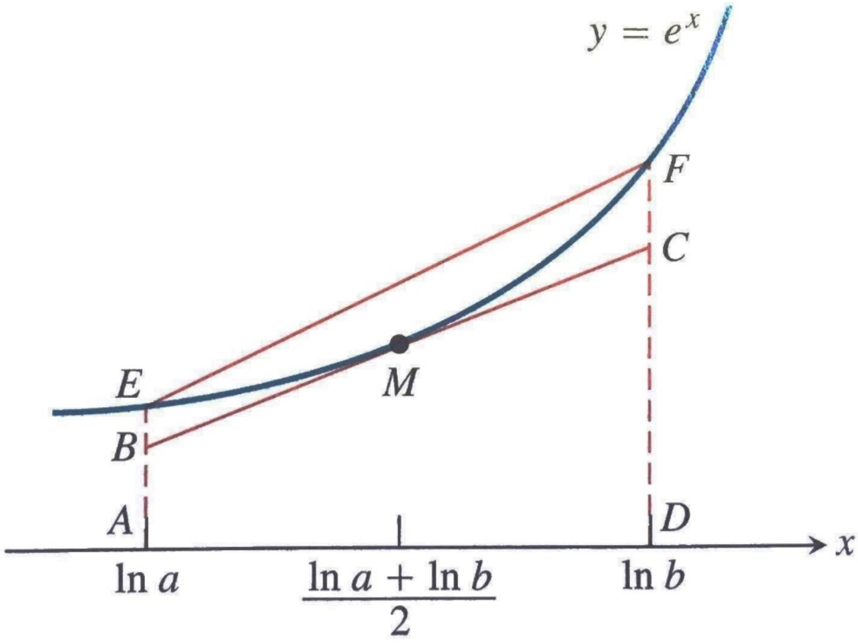
$$I=\int_0^a \frac{f_{(t)}}{f_{(t)}+f_{(a-t)}}dt \;=\; \int_0^a \frac{f_{(a-t)}}{f_{(a-t)}+f_{(t)}}dt$$

$$I+I \;=\; \int_0^a \frac{f_{(t)}}{f_{(t)}+f_{(a-t)}}dt \;+\; \int_0^a \frac{f_{(a-t)}}{f_{(a-t)}+f_{(t)}}dt$$

$$2I \;=\; \int_0^a \left[\frac{f_{(t)}}{f_{(t)}+f_{(a-t)}}+\frac{f_{(a-t)}}{f_{(a-t)}+f_{(t)}}\right]dt \;=\; \int_0^a \frac{f_{(t)}+f_{(a-t)}}{f_{(t)}+f_{(a-t)}}dt \;=\; \int_0^a dt$$

$$I \;=\; \frac{1}{2}\int_0^a dt \;=\; \frac{1}{2}[t|_0^a \;=\; \frac{a}{2}$$

5. שימושי האינטגרל – הוכחה של אי-שוויון



א. (5 נקו') הראה כי הגרף של e^x קעור (כמו קערה) סביב כל ערך של x.

ב. (15 נקו') התבונן בציור והראה שאם $0<a<b$ אז,

$$e^{(lna+lnb)/2} \cdot (lnb - lna) < \int_{lna}^{lnb} e^x \cdot dx < \frac{e^{lna} + e^{lnb}}{2} \cdot (lnb - lna)$$

ג. (5 נקו') תוך שימוש באי-שוויון מסעיף קודם, הראה כי:

$$\sqrt{ab} < \frac{b-a}{lnb - lna} < \frac{a+b}{2}$$

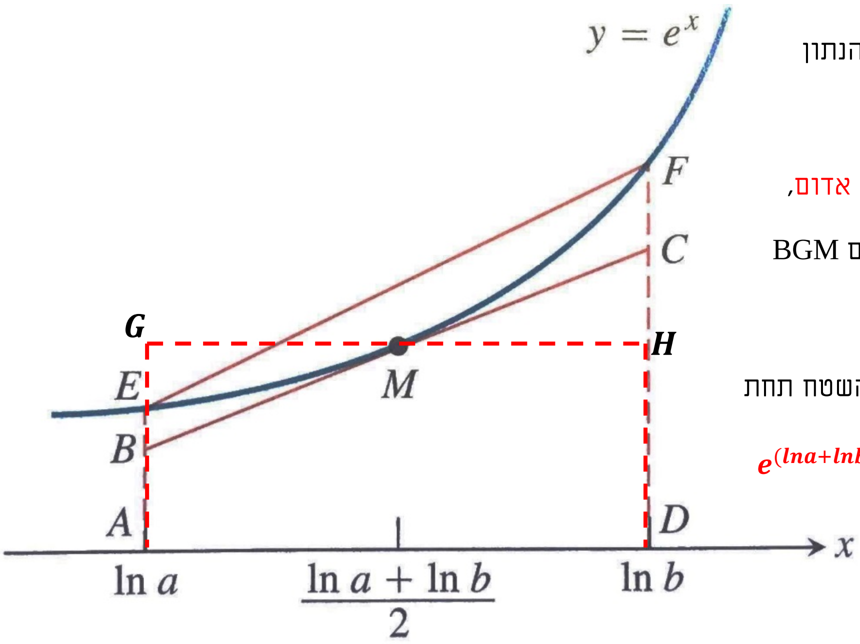
אי שוויון זה אומר כי הממוצע הגיאומטרי של שני מספרים חיוביים קטן מהממוצע הלוגריתמי שלהם, אשר קטן מהממוצע החשבוני שלהם.

<u>פיתרון</u>:

א. יש להראות כי הגרף של e^x קעור סביב כל ערך של x.

הנגזרת השנייה של $y = e^x$ היא $y'' = e^x$ שהינה חיובית לכל ערך של x, לכן הגרף קעור סביב כל ערך של x.

ב. אם $0<a<b$ אז $e^{(lna+lnb)/2}\cdot(lnb-lna) < \int_{lna}^{lnb} e^x\cdot dx < \frac{e^{lna}+e^{lnb}}{2}\cdot(lnb-lna)$



האינטגרל הנתון הינו השטח שמתחת לגרף הנתון

בתחום $lna < x < lnb$.

אגף שמאל הנתון הוא שטח המלבן המקווקו אדום,

אשר שווה לשטח הטרפז ABCD (המשולשים BGM

ו- CHM חופפים ולכן שווים בשטחם).

הציור מראה כי שטח הטרפז ABCD קטן מהשטח תחת

הגרף: $e^{(lna+lnb)/2}\cdot(lnb-lna) < \int_{lna}^{lnb} e^x\cdot dx$

אגף ימין הנתון הוא שטח הטרפז *AEFD* (ממוצע בסיסי כפול גובהו). הציור מראה כי שטח זה גדול מהשטח תחת הגרף:

$$\int_{lna}^{lnb} e^x\cdot dx < \frac{e^{lna}+e^{lnb}}{2}\cdot(lnb-lna)$$

ג. תוך שימוש באי-שוויון מסעיף ב', יש להראות כי: $\sqrt{ab} < \frac{b-a}{lnb-lna} < \frac{a+b}{2}$

$$e^{(lna+lnb)/2}\cdot(lnb-lna) < \int_{lna}^{lnb} e^x\cdot dx < \frac{e^{lna}+e^{lnb}}{2}\cdot(lnb-lna)$$

$$\sqrt{e^{lna+lnb}}\cdot(lnb-lna) < e^x\Big|_{lna}^{lnb} < \frac{a+b}{2}\cdot(lnb-lna)$$

$$\sqrt{e^{ln(ab)}}\cdot(lnb-lna) < e^{lnb}-e^{lna} < \frac{a+b}{2}\cdot(lnb-lna)$$

$$\sqrt{e^{ln(ab)}}\cdot(lnb-lna) < b-a < \frac{a+b}{2}\cdot(lnb-lna)$$

$$\sqrt{ab}\cdot(lnb-lna) < b-a < \frac{a+b}{2}\cdot(lnb-lna)$$

$$\sqrt{ab} < \frac{b-a}{lnb-lna} < \frac{a+b}{2}$$