1. מבחן הנגזרות

מצא ערכים ל- h, k ו- a כך שהמעגל $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ ישיק לפרבולה $y=x^2+1$
בנקודה (1,2) וכמו כן יתקיים התנאי שהנגזרת השנייה של שתי העקומות תהיה זהה בנקודת ההשקה.

פיתרון:

למעגל ולפרבולה אותו השיפוע בנקודת ההשקה – יש להם משיק משותף בנקודה זו.

כדי להבטיח השקה למעגל בנקודה שעליו, כדאי להשתמש במשפט "משיק למעגל מאונך לרדיוס"

שמשמעו "שיפועי המשיק והרדיוס הופכיים ונגדיים". מרכז המעגל הוא בנקודה $\boldsymbol{M(h,k)}$, זאת אנו יודעים,

ואם כך שיפועו של הרדיוס אשר קצותיו הם מרכז המעגל והנקודה (1,2) שעל המעגל הוא: $\boldsymbol{m}_{\text{רדיוס}}=\frac{k-2}{h-1}$.

שיפוע המשיק למעגל בנקודה (1,2) הופכי ונגדי לשיפוע הרדיוס הנ"ל: $\boldsymbol{m}_{\text{משיק}}=-\frac{h-1}{k-2}$

שיפוע המשיק לפרבולה בנקודה (1,2) הוא: $\boldsymbol{y_{(x)}=x^2+1 \;\Rightarrow\; y'_{(x)}=2x \;\Rightarrow\; m_{\text{משיק}}=y'_{(1)}=2}$

זהו אבל "אותו המשיק" (משיק משותף), ולכן:

$$\boldsymbol{m_{\text{משיק}}=-\frac{h-1}{k-2}=2 \;\Rightarrow\; \frac{h-1}{k-2}=-2 \;\Rightarrow\; h=-2k+5 \;\Rightarrow\; k=-\frac{1}{2}h+2.5}$$

הימצאותו של מרכז המעגל על הישר $\boldsymbol{y=-\frac{1}{2}x+2.5}$ היא תנאי הכרחי להשקת המעגל לפרבולה בנקודה (1,2).

כעת לדרישה הנוספת – נגזרת שנייה זהה בנקודת ההשקה, או במילים אחרות, עקמומיות זהה בנקודה (1,2).
עקמומיותה הקעורה של הפרבולה היא 2 (נגזרתה השנייה). זאת, אגב, בכל נקודה שעליה, לא רק בנקודה (1,2).

נפתח כעת ביטוי לעקמומיותו (נגזרתו השנייה) של המעגל בנקודת ההשקה (1,2) ואז נדרוש שתהא שווה ל- 2:

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}\left[(x-h)^2+(y_{(x)}-k)^2\right]=\frac{d}{dx}[a^2] \;\Rightarrow\; 2(x-h)+2(y_{(x)}-k)y'_{(x)}=0 \;\Rightarrow}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow\; y'_{(x)}=-\frac{x-h}{y_{(x)}-k} \;\Rightarrow\; y''_{(x)}=-\frac{y_{(x)}-k-y'_{(x)}(x-h)}{\left(y_{(x)}-k\right)^2}}$$

$$\boldsymbol{y''_{(x)}=-\frac{y_{(x)}-k+\frac{x-h}{y_{(x)}-k}(x-h)}{\left(y_{(x)}-k\right)^2}=-\frac{\left(y_{(x)}-k\right)^2+(x-h)^2}{\left(y_{(x)}-k\right)^3}}$$

$$\boldsymbol{y''_{(1)}=-\frac{\left(y_{(1)}-k\right)^2+(1-h)^2}{\left(y_{(1)}-k\right)^3}=-\frac{(2-k)^2+(1-h)^2}{(2-k)^3}\quad,\quad h=-2k+5}$$

$$\boldsymbol{y''_{(1)}=-\frac{(2-k)^2+(1+2k-5)^2}{(2-k)^3}=-\frac{(2-k)^2+(2k-4)^2}{(2-k)^3}}$$

$$\boldsymbol{y''_{(1)}=-\frac{(k-2)^2+4(k-2)^2}{(2-k)^3}=-\frac{5(k-2)^2}{(2-k)^3}=\frac{5(k-2)^2}{(k-2)^3}=\frac{5}{k-2}}$$

סיכום ביניים:

כול מעגל אשר משיק לפרבולה ב- (1,2), עקמומיותו שם היא $y''_{(1)} = \frac{5}{k-2}$ (k הוא שיעור ה- y של מרכז המעגל).

מרכז מעגל גבוה מנקודת ההשקה משמעו $k > 2$. $y''_{(1)}$ חיובית אז והמעגל קעור בסביבת נקודת ההשקה (הגיוני).

מרכז מעגל נמוך מנקודת ההשקה משמעו $k < 2$. $y''_{(1)}$ שלילית אז והמעגל קמור בסביבת נקודת ההשקה (הגיוני).

נדרשנו לכך שעקמומיות המעגל בנקודת ההשקה תהא שווה לעקמומיותה של הפרבולה שם, ז"א ל- 2:

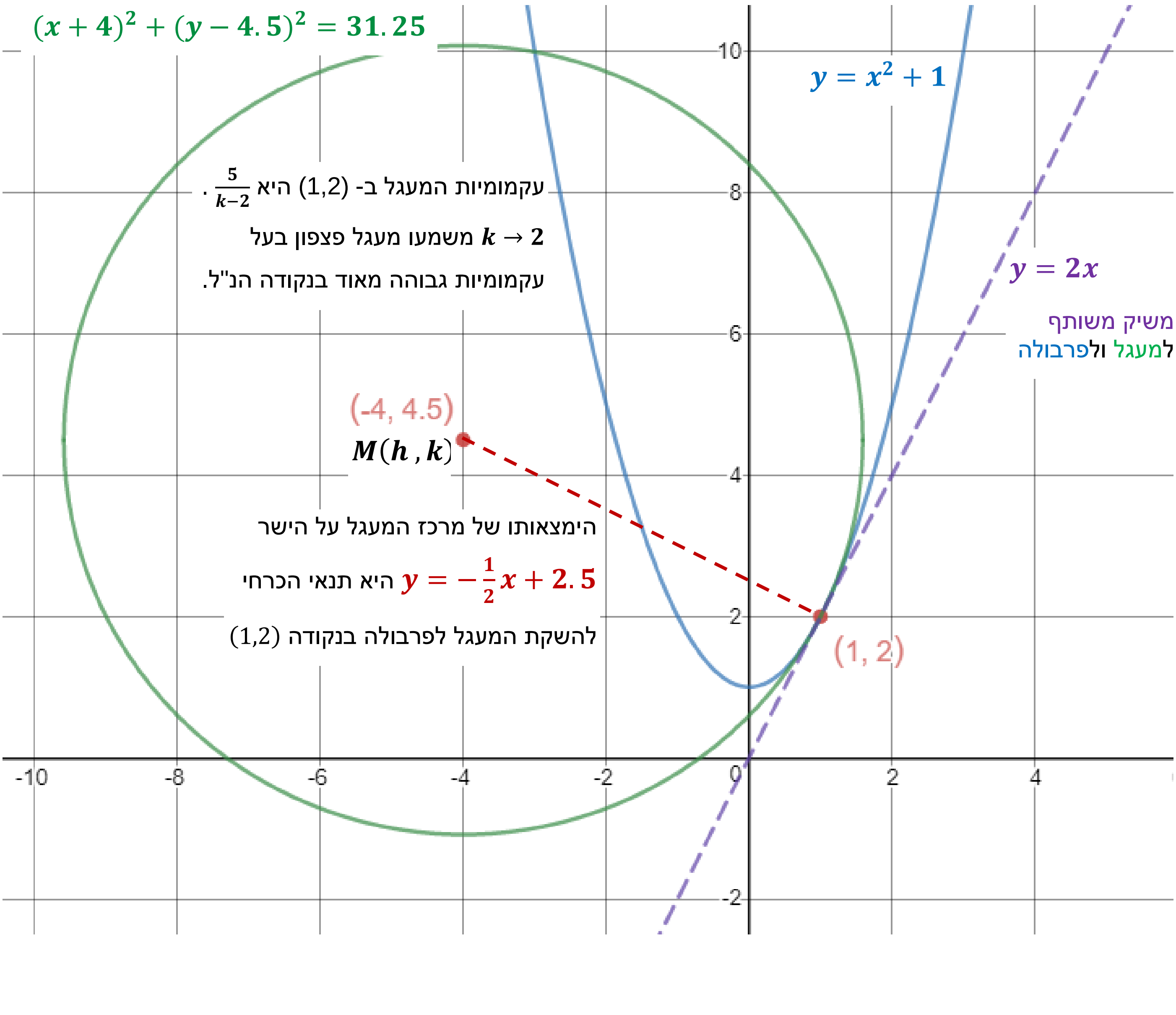
$$\frac{5}{k-2} = 2 \quad => \quad 5 = 2k - 4 \quad => \quad k = 4.5 \quad , \quad h = -2k + 5 = -4$$

נציב ערכים אלה של h ו- k במשוואת המעגל הנתונה:

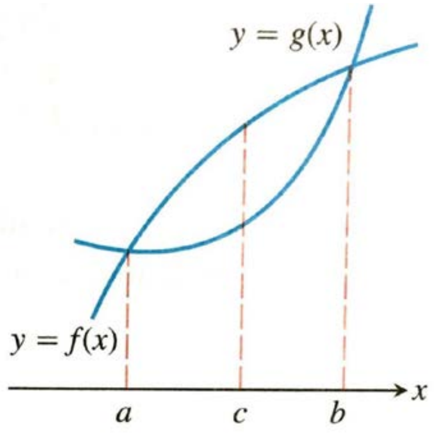
$$(x+4)^2 + (y-4.5)^2 = a^2$$

נותר רק למצוא את רדיוס המעגל a. נציב לשם כך במשוואה הנ"ל את הנקודה $(1,2)$ אשר נמצאת על המעגל:

$$(1+4)^2 + (2-4.5)^2 = a^2 \quad => \quad 31.25 = a^2 \quad => \quad a = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$



2. שימושי הנגזרת



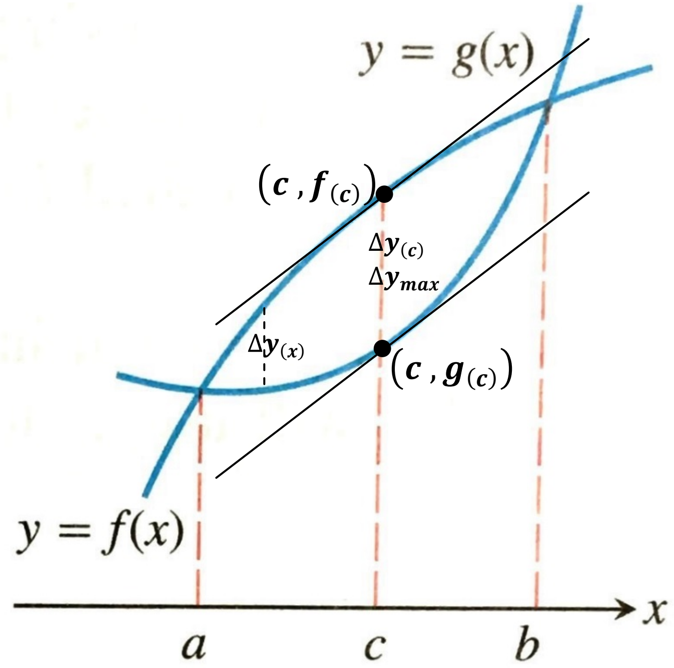
$f_{(x)}$ ו- $g_{(x)}$ הן שתי פונקציות גזירות אשר מצוירות להלן.

המרחק האנכי בין הפונקציות, בנקודה c, הוא הגדול ביותר.

מה מייחד את המשיקים לשתי הפונקציות בנקודה c?

הסבר כל שלב.

<u>פיתרון:</u>



$$\Delta y_{(x)} = f_{(x)} - g_{(x)}$$

$$\Delta y'_{(x)} = f'_{(x)} - g'_{(x)}$$

$$\Delta y'_{(c)} = f'_{(c)} - g'_{(c)}$$

$$\Delta y_{(c)} = \Delta y_{max} \quad => \quad \Delta y'_{(c)} = 0 \quad =>$$

$$0 = f'_{(c)} - g'_{(c)} \quad => \quad f'_{(c)} = g'_{(c)}$$

המשיקים לשתי הפונקציות בנקודה c מקבילים זה לזה.

3. המשפט היסודי

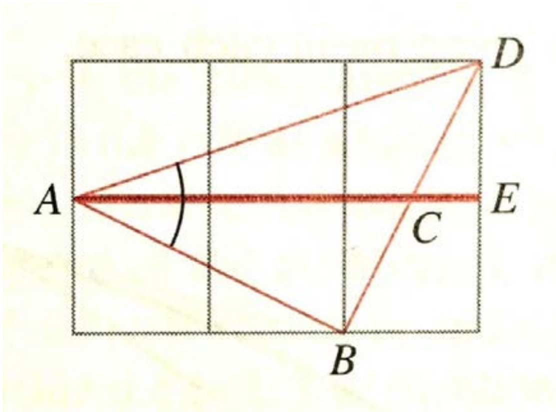
מצא את $f'_{(2)}$ אם $f_{(x)} = e^{g(x)}$ ו- $g_{(x)} = \int_2^x \frac{t}{1+t^4}dt$.

$$g_{(x)} = \int_2^x \frac{t}{1+t^4}dt \qquad => \qquad g_{(2)} = \int_2^2 \frac{t}{1+t^4}dt = 0$$

$$f(x) = e^{g(x)} \quad => \quad f'_{(x)} = g'_{(x)}e^{g(x)} \quad => \quad f'_{(2)} = g'_{(2)}e^{g(2)} = g'_{(2)}e^0 = g'_{(2)}$$

$$g'_{(x)} = \frac{d}{dx}\int_2^x \frac{t}{1+t^4}dt = \frac{x}{1+x^4} \quad => \quad g'_{(2)} = \frac{2}{1+2^4} = \frac{2}{17} = f'_{(2)}$$

4. פונקציות טריגונומטריות הפוכות

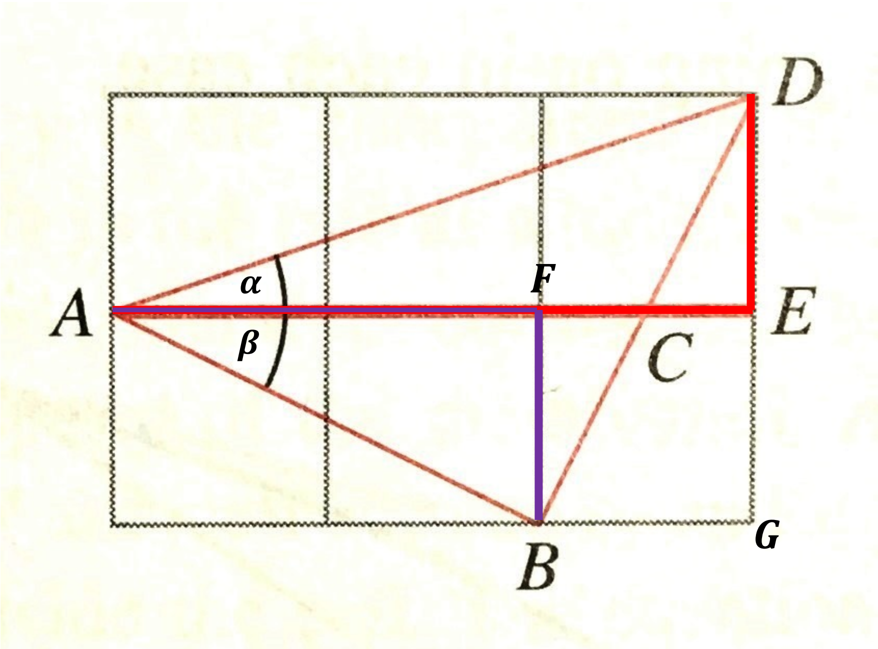


א. הוכח בעזרת הציור כי

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$$

(20 נקו').

<u>פיתרון:</u>



$$\tan\alpha = \frac{DE}{AE} = \frac{1}{3} \quad =>$$

$$=> \quad \alpha = \arctan\frac{1}{3}$$

$$\tan\beta = \frac{BF}{AF} = \frac{1}{2} \quad =>$$

$$=> \quad \beta = \arctan\frac{1}{2}$$

$$\measuredangle DAB = \alpha + \beta = \arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} AD^2 = AE^2 + DE^2 = 3^2 + 1^2 = 10 \\ AB^2 = AF^2 + BF^2 = 2^2 + 1^2 = 5 \\ BD^2 = DG^2 + BG^2 = 2^2 + 1^2 = 5 \end{cases} \quad => \quad AD^2 = AB^2 + BD^2 \quad => \quad \measuredangle ABD = \frac{\pi}{2}$$

ΔABD ישר זווית ושווה שוקיים $(BA = BD)$ <= זוויות הבסיס AD שוות זו לזו <= $\measuredangle DAB = \frac{\pi}{4}$

$$\measuredangle DAB = \arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$$

ב. מצא את $\int arcsinxdx$ (5 נקו')

<u>פיתרון:</u>

$$\int arcsinx\,dx \quad => \quad \begin{cases} u = arcsinx \quad => \quad du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ dv = dx \quad => \quad v = \int dx = x \end{cases}$$

$$\int u \cdot dv \quad = \quad u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\int arcsinx\,dx \quad = \quad xarcsinx - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad \rightarrow \quad \begin{cases} t = 1 - x^2 \\ dt = -2xdx \end{cases} \quad = \quad \int \frac{-2x}{-2\sqrt{1-x^2}}dx \quad = \quad -\int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}dx \quad =$$

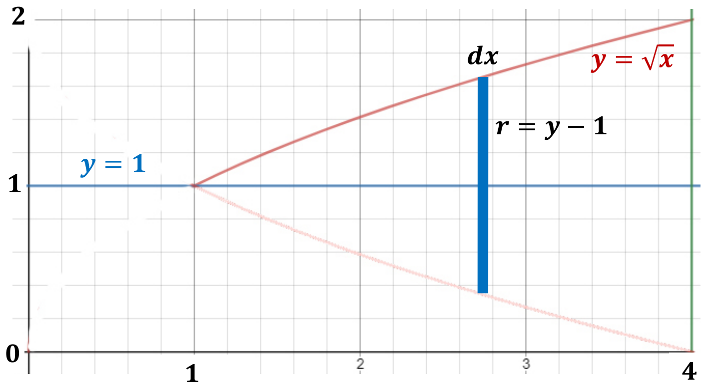
$$= \quad -\int \frac{1}{2\sqrt{t}}dt \quad = \quad -\sqrt{t} \quad = \quad -\sqrt{1-x^2}$$

$$\int arcsinx\,dx \quad = \quad xarcsinx + \sqrt{1-x^2} \; + \; C$$

5. שימושי האינטגרל – חישוב נפח

מצא את נפח הגוף הנוצר על ידי סיבוב התחום הכלוא בין $y = \sqrt{x}$, $y=1$ ו- $x=4$ סביב הישר $y=1$
תוך שימוש בשיטת הדיסקות (10 נקו') ובשיטת הקליפות הגליליות (15 נקו').

<u>פיתרון בדיסקות:</u>



$$dV = \pi r^2 dx = \pi(y-1)^2 dx =$$

$$= \pi\left(\sqrt{x}-1\right)^2 dx$$

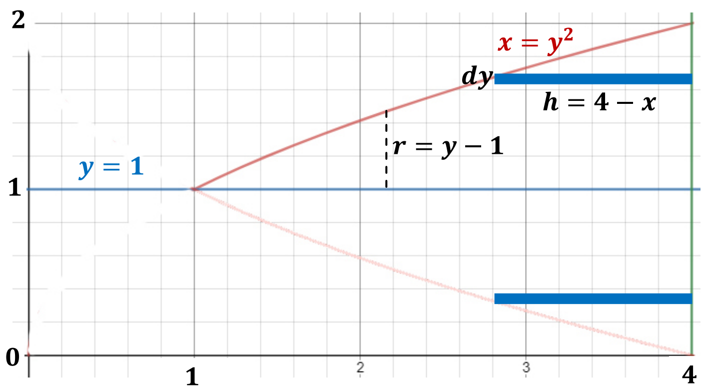
$$dV = \pi\left(x - 2\sqrt{x} + 1\right)dx$$

$$V = \pi\int_1^4 \left(x - 2\sqrt{x} + 1\right)dx =$$

$$= \pi\left[\frac{x^2}{2} - \frac{4}{3}x^{3/2} + x\right|_1^4 =$$

$$= \pi\left[8 - \frac{32}{3} + 4 - \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3} + 1\right)\right] = \frac{7\pi}{6} \ \textit{Cubic Units}$$

<u>פיתרון בקליפות:</u>



$$dV = 2\pi rh dy = 2\pi(y-1)(4-x)dy =$$

$$= 2\pi(y-1)(4-y^2)dy$$

$$dV = -2\pi(y^3 - y^2 - 4y + 4)dy$$

$$V = -2\pi\int_1^2 (y^3 - y^2 - 4y + 4)dy =$$

$$= -2\pi\left[\frac{y^4}{4} - \frac{y^3}{3} - 2y^2 + 4y\right|_1^2 =$$

$$= -2\pi\left[4 - \frac{8}{3} - 8 + 8 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} - 2 + 4\right)\right] = \frac{7\pi}{6} \ \textit{Cubic Units}$$