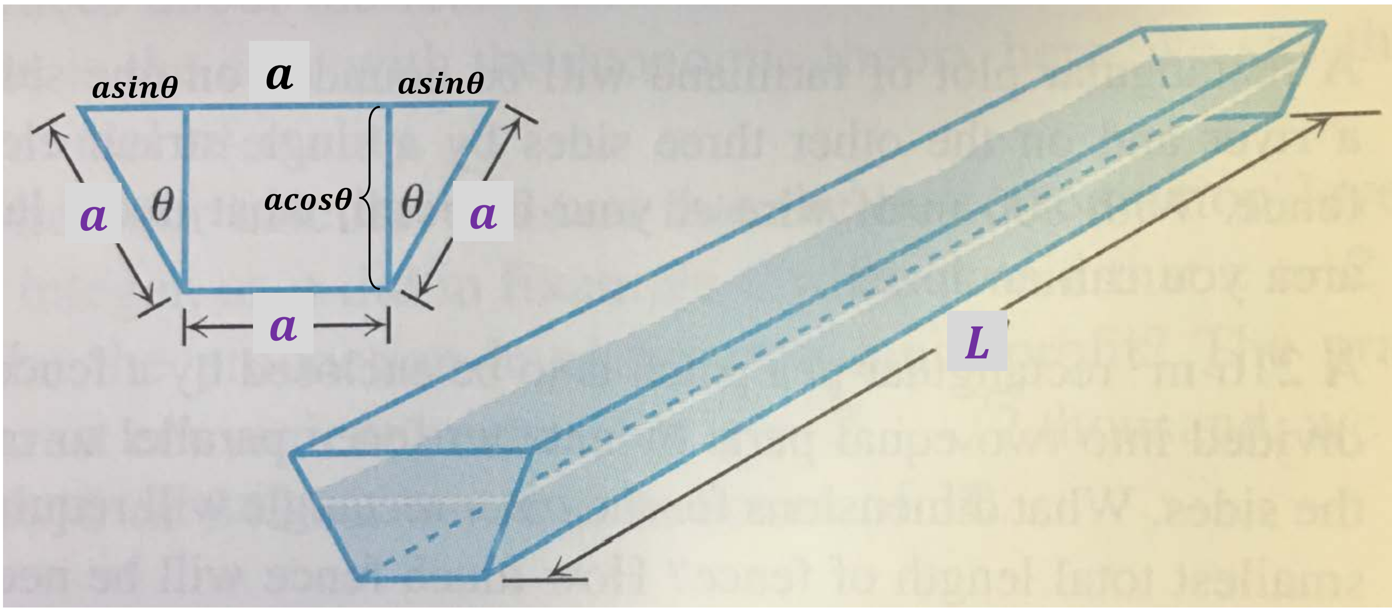
1. שימושי הנגזרת

עליך למקסם את נפח השוקת שבציור באמצעות שינוייה של הזווית θ בלבד.

מהו ערכה של θ אשר מניב נפח מרבי ?



<u>פיתרון</u> (בציור הנתונים בסגול והתובנות בשחור):

הגדלתה של θ מפחיתה את עומק השוקת ויחד עם זאת מגדילה את רוחבה. יש למצוא פשרה מיטבית.

אורכה של השוקת אינו רלוונטי לשאלה, רק שטח החתך הרוחבי שלה (טרפז שווה שוקיים) אותו עלינו למקסם.

$$S_{(\theta)} = \text{ממוצע הבסיסים} \cdot \text{הגובה} = \frac{2a+2asin\theta}{2} \cdot acos\theta = (a+asin\theta)\cdot acos\theta =$$

$$= a^2(1+sin\theta)\cdot cos\theta = a^2(cos\theta+sin\theta cos\theta) = \frac{1}{2}a^2(2cos\theta+2sin\theta cos\theta)$$

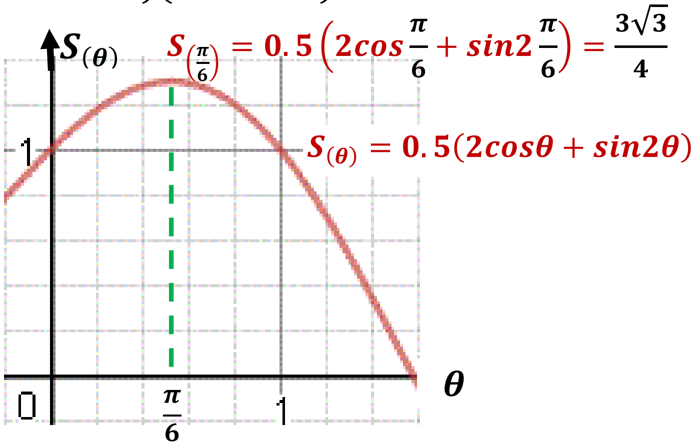
$$S_{(\theta)} = \frac{1}{2}a^2(2cos\theta+sin2\theta) \quad \to \quad max$$

$$S'_{(\theta)} = \frac{1}{2}a^2(-2sin\theta+2cos2\theta) = a^2(-sin\theta+cos2\theta) = 0 \quad =>$$

$$=> \quad cos2\theta - sin\theta = 0 \quad => \quad 1-2sin^2\theta - sin\theta = 0 \quad =>$$

$$=> \quad 2sin^2\theta + sin\theta - 1 = 0 \quad => \quad (2sin\theta-1)(sin\theta+1) = 0 \quad =>$$

$$=> \quad sin\theta = \frac{1}{2} \quad => \quad \theta = \frac{\pi}{6}\ rad$$



באיור מימין נבחר $a = 1$.

שטח חתך (S) מרבי מושג כאשר $\theta = \frac{\pi}{6}\ rad$

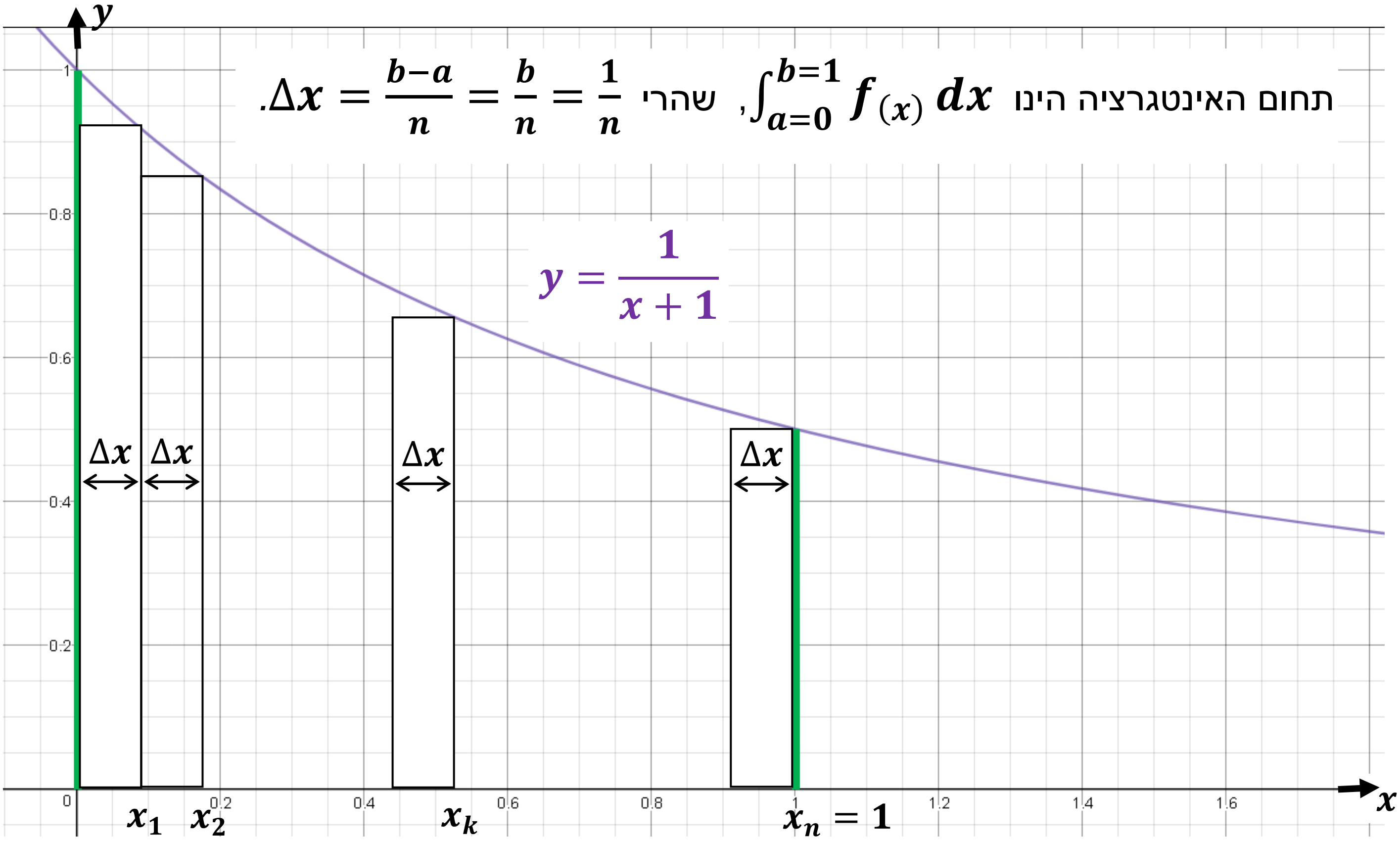
2. סכום רימן

מצא את הגבול $lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$. הסבר כל שלב (כולל תחום האינטגרציה וציור הגרף).

פיתרון:

$$\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right) = \left(\frac{1}{1+1/n}+\frac{1}{1+2/n}+\cdots+\frac{1}{1+1}\right)\frac{1}{n} =$$

תחום האינטגרציה הינו $\int_{a=0}^{b=1} f_{(x)}\,dx$, שהרי $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{b}{n}=\frac{1}{n}$.



$$= \left(\frac{1}{1+\Delta x}+\frac{1}{1+2\Delta x}+\cdots+\frac{1}{1+k\Delta x}+\cdots+\frac{1}{1+n\Delta x}\right)\frac{1}{n} =$$

$$= \left(\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\frac{1}{x_3+1}+\cdots+\frac{1}{x_k+1}+\cdots+\frac{1}{x_n+1}\right)\Delta x =$$

$$= \frac{1}{x_1+1}\Delta x+\frac{1}{x_2+1}\Delta x+\frac{1}{x_3+1}\Delta x+\cdots+\frac{1}{x_k+1}\Delta x+\cdots+\frac{1}{x_n+1}\Delta x =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k+1}\cdot\Delta x = \sum_{k=1}^{n} f_{(X_k)}\cdot\Delta x \quad => \quad f_{(x)}=\frac{1}{x+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k+1}\cdot\Delta x = \int_0^1\frac{1}{x+1}dx =$$

$$= ln|x+1|\Big|_0^1 = ln2-ln1 = ln2$$

3. המשפט היסודי

מצא את הנגזרת של $g_{(y)} = \int_{\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} \sin(t^2)dt$.

<u>פיתרון:</u>

$$g_{(y)} = \int_{\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} \sin(t^2)dt \quad => \quad \frac{d}{dy} g_{(y)} = \frac{d}{dy}\int_{\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} \sin(t^2)dt =$$

$$\int_{\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} \sin(t^2)dt = \int_{\sqrt{y}}^{a} \sin(t^2)dt + \int_{a}^{2\sqrt{y}} \sin(t^2)dt \quad , \quad \sqrt{y} < a < 2\sqrt{y}$$

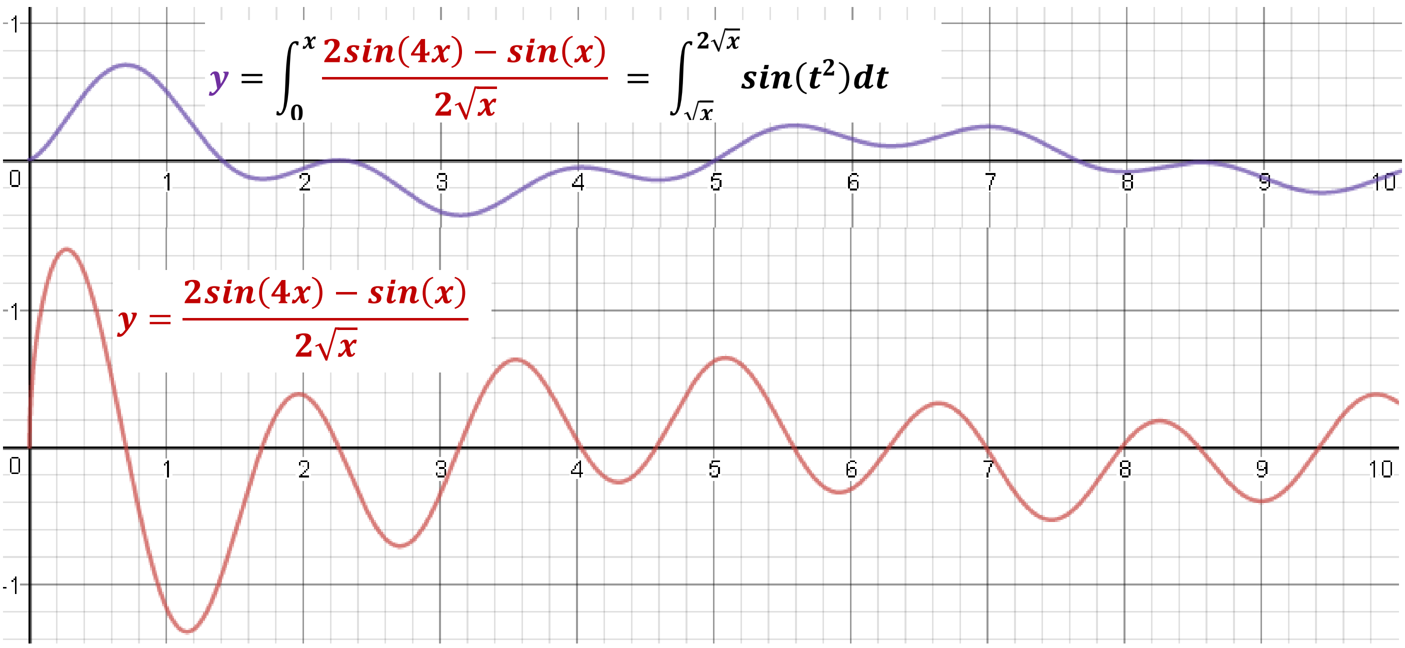
$$= \frac{d}{dy}\left[\int_{\sqrt{y}}^{a} \sin(t^2)dt + \int_{a}^{2\sqrt{y}} \sin(t^2)dt\right] = \frac{d}{dy}\left[-\int_{a}^{\sqrt{y}} \sin(t^2)dt + \int_{a}^{2\sqrt{y}} \sin(t^2)dt\right] =$$

$$= \frac{d}{dy}\int_{a}^{2\sqrt{y}} \sin(t^2)dt - \frac{d}{dy}\int_{a}^{\sqrt{y}} \sin(t^2)dt$$

$$\frac{d}{dy}\int_{a}^{u=2\sqrt{y}} \sin(t^2)dt = \frac{d}{du}\int_{a}^{u} \sin(t^2)dt \cdot \frac{du}{dy} = \sin(u^2)\cdot\frac{du}{dy} = \sin(4y)\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$\frac{d}{dy}\int_{a}^{v=\sqrt{y}} \sin(t^2)dt = \frac{d}{dv}\int_{a}^{v} \sin(t^2)dt \cdot \frac{dv}{dy} = \sin(v^2)\cdot\frac{dv}{dy} = \sin(y)\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$\frac{d}{dy} g_{(y)} = \frac{d}{dy}\int_{\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} \sin(t^2)dt = \frac{\sin(4y)}{\sqrt{y}} - \frac{\sin(y)}{2\sqrt{y}} = \frac{2\sin(4y) - \sin(y)}{2\sqrt{y}}$$



4. גבוה ואינטגרל

א. מצא את $\int ln(x + x^2)\, dx$ (13 נק').

$$\int u \cdot dv \quad = \quad u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\int ln(x^2 + x)\, dx \ \rightarrow \begin{cases} u = ln(x^2 + x) \ => \ du = \dfrac{2x + 1}{x^2 + x} dx \\ dv = dx \ => \ v = x \end{cases}$$

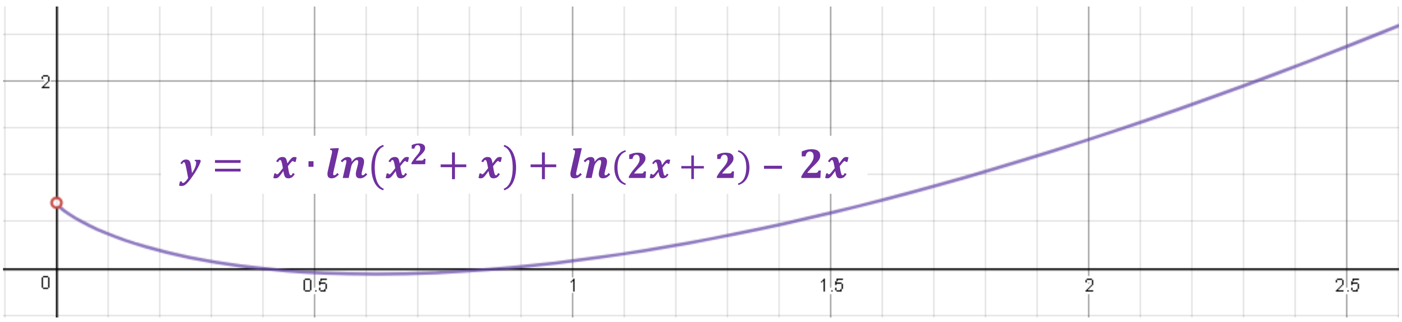
$$\int ln(x^2 + x)\, dx \quad = \quad ln(x^2 + x) \cdot x - \int x \cdot \frac{2x + 1}{x^2 + x} dx \quad =$$

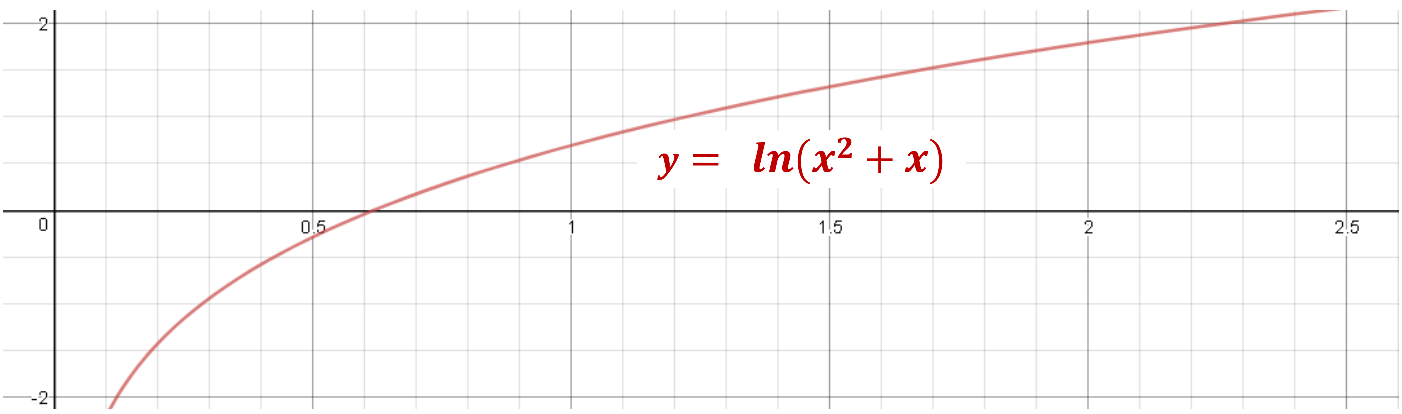
$$= \ x \cdot ln(x^2 + x) - \int \frac{2x + 1}{x + 1} dx \quad = \quad x \cdot ln(x^2 + x) - \int \frac{2x + 1}{2x + 2} \cdot 2dx$$

$$\int \frac{2x + 1}{2x + 2} \cdot 2dx \ \rightarrow \begin{cases} t = 2x + 2 \quad => \quad dt = 2dx \\ t - 1 = 2x + 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{2x + 1}{2x + 2} dx \ = \int \frac{t - 1}{t} dt \ = \int \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt \ = \ t - ln(t) \ = \ 2x + 2 - ln(2x + 2)$$

$$\int ln(x^2 + x)\, dx \ = \ x \cdot ln(x^2 + x) + ln(2x + 2) - 2x + C$$



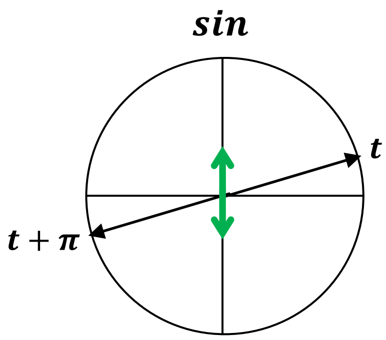


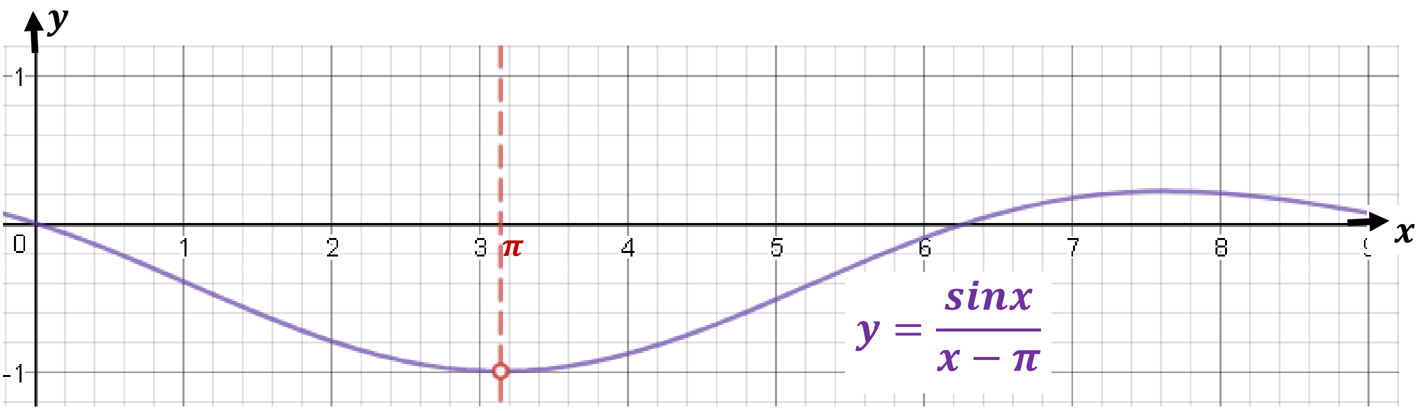
ב. מצא את $lim_{x\to\pi}\frac{sinx}{x-\pi}$ (12 נק'). אסור להשתמש בכלל לופיטל.

פיתרון:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{sinx}{x-\pi} = \left[\frac{0}{0}\right] \to \begin{cases} t = x-\pi \\ x = t+\pi \end{cases} = \lim_{t\to 0}\frac{sin(t+\pi)}{t} =$$

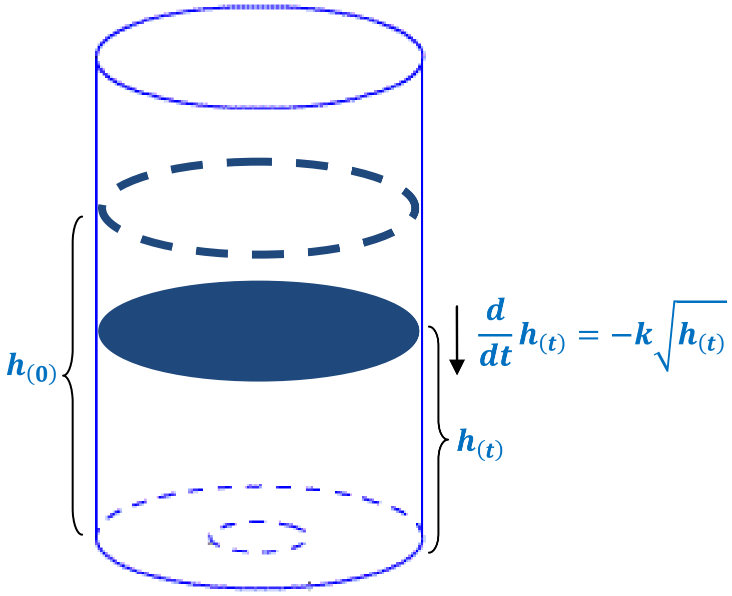
$$= \lim_{t\to 0}\frac{-sint}{t} = -\lim_{t\to 0}\frac{sint}{t} = -1$$





5. חשיבה דיפרנציאלית ושימושי האינטגרל: מש' דיפ' ניתנת להפרדה

מרוקנים מיכל גלילי אנכי על ידי פתיחת ברז הנמצא בתחתית המיכל. המים יברחו מהר כאשר המיכל מלא אך יַאֱטוּ עם ירידת גובה המים. מסתבר כי קצב ירידת גובה המים, *y*, יחסי לשורש של גובה המים. סמן את מקדם היחס על ידי k. מקדם היחס תלוי בקבוע הגרביטציה, הצורה הגיאומטרית של חור הניקוז, הנוזל שבתוך המיכל והיחס שבין שטח החתך של החור לשטח החתך של המיכל. הזמן, t, נמדד בדקות. הנה כי k=1/10.
תוך כמה זמן יתרוקן המיכל אם עומקם ההתחלתי 9 רגל? הסבר כל שלב.



$$\frac{dh_{(t)}}{dt} = -k\sqrt{h_{(t)}}$$

$$\frac{dh_{(t)}}{\sqrt{h_{(t)}}} = -k \cdot dt$$

$$\int_{h_{(0)}}^{h_{(t)}} \frac{dH_{(t)}}{2\sqrt{H_{(t)}}} = -\frac{k}{2}\int_{0}^{t} dT$$

$$\sqrt{H_{(t)}}\Big|_{h_{(0)}}^{h_{(t)}} = -\frac{k}{2}T\Big|_{0}^{t}$$

$$\sqrt{h_{(t)}} - \sqrt{h_{(0)}} = -\frac{k}{2}t$$

$$\sqrt{h_{(t)}} = -\frac{k}{2}t + \sqrt{h_{(0)}}$$

$$h_{(t)} = \left(\frac{k}{2}t - \sqrt{h_{(0)}}\right)^2$$

$$0 = \left(\frac{k}{2}t - \sqrt{h_{(0)}}\right)^2 \quad => \quad t = \frac{2\sqrt{h_{(0)}}}{k} = \frac{2\sqrt{9}}{0.1} = 60\ min$$