1. הגדרת הנגזרת

בניין שגובהו 80 מטרים מטיל ברגע מסוים של היום צל שאורכו 60 מטרים.
לאורך הצל מונח סרגל בעל שנתות במרווחים של 1 מ"מ, כך שדיוק מדידת אורך הצל הינו אלפית המטר. ברגע המדובר, הזווית θ (ראה איור) גדלה בקצב של 30 מעלות לדקה. באיזה קצב מתקצר אורך הצל באותו רגע?
יש לחשב באמצעות הצבה בהגדרת הנגזרת! הסבר כל שלב. אין להשתמש בנוסחאות ו/או בכלל השרשרת.

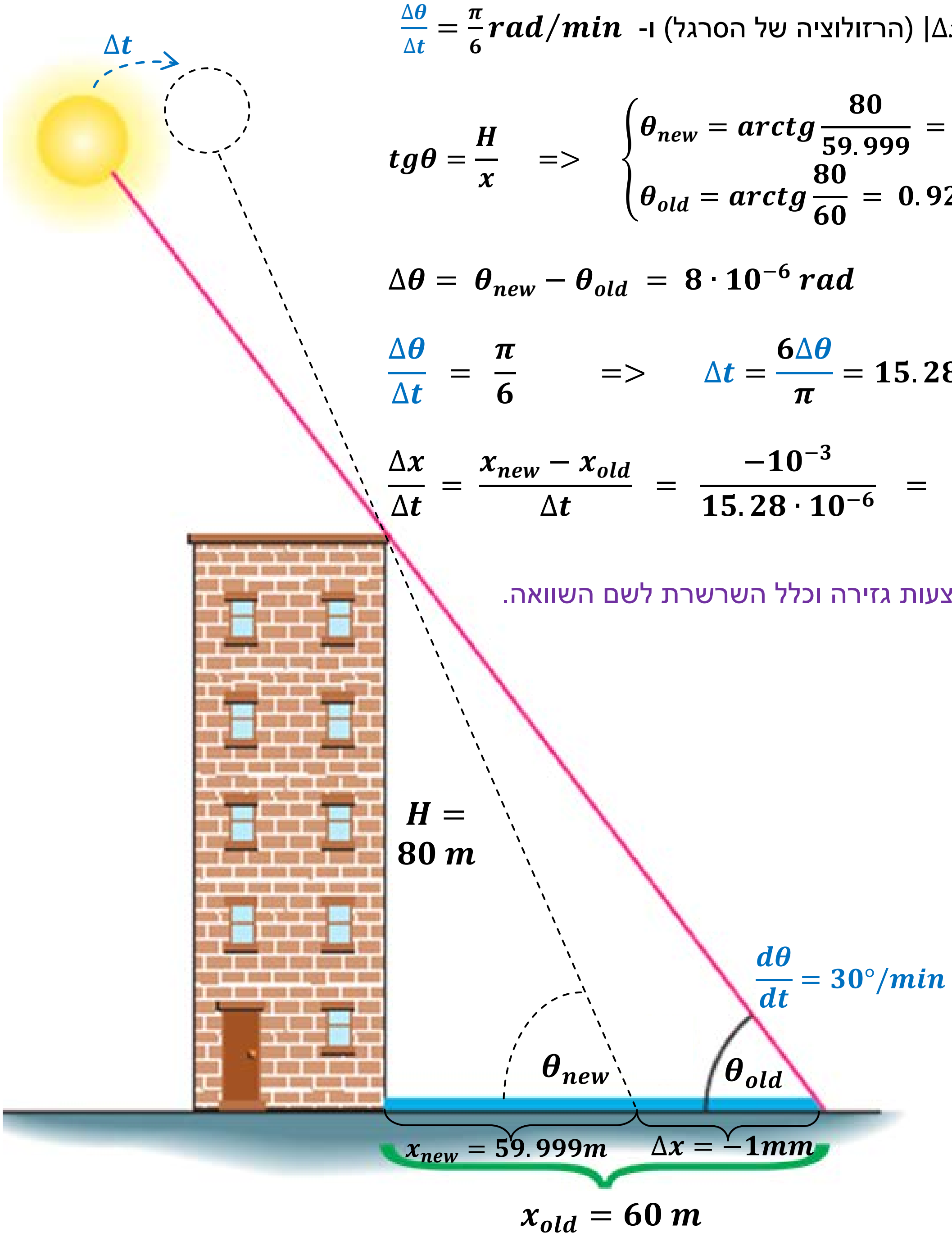
פיתרון: נתון $|\Delta x| = 10^{-3} m$ (הרזולוציה של הסרגל) ו- $\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\pi}{6} rad/min$

$$tg\theta = \frac{H}{x} \quad => \quad \begin{cases} \theta_{new} = arctg\dfrac{80}{59.999} = 0.927303218\ rad \\ \theta_{old} = arctg\dfrac{80}{60} = 0.927295218\ rad \end{cases}$$

$$\Delta\theta = \theta_{new} - \theta_{old} = 8 \cdot 10^{-6}\, rad$$

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\pi}{6} \qquad => \qquad \Delta t = \frac{6\Delta\theta}{\pi} = 15.28\mu S$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_{new} - x_{old}}{\Delta t} = \frac{-10^{-3}}{15.28 \cdot 10^{-6}} = -65.45\ m/min$$



מתחת לאיור, פיתרון באמצעות גזירה וכלל השרשרת לשם השוואה.

$$tg\theta = \frac{H}{x} \quad => \quad x = H\frac{1}{tg\theta} \quad => \quad \frac{dx}{d\theta} = -H\frac{1}{tg^2\theta \cdot cos^2\theta} = \frac{-H}{sin^2\theta}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{-H}{sin^2\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{-80}{\left(\frac{4}{5}\right)^2} \cdot \frac{\pi}{6} = -65.45\, m/min \qquad (chain\ rule)$$

.2 חקירת פונקציה + שימושי הנגזרת כדי לענות על השאלה:

מי גדול יותר, $\boldsymbol{\pi^e}$ או $\boldsymbol{e^\pi}$? (ללא מחשבון כיס)

א. צייר את $y_{(x)} = ln(x)$ (3 נק'). מצא משוואת משיק לגרף אשר עובר דרך הראשית, וצייר אותו (12 נק').

ב. מתוך העקומות שציירת בסעיף א', הסבר מדוע $ln(x) < \frac{x}{e}$ לכל x חיובי אשר מקיים $x \neq e$ (3 נק')?

ג. הראה כי $\ln(x^e) < x$ לכל x חיובי אשר מקיים $x \neq e$ (3 נק')

ד. הראה כי $x^e < e^x$ לכל x חיובי אשר מקיים $x \neq e$ (3 נק')

ה. אז מי גדול יותר, π^e או e^π (1 נק') ?

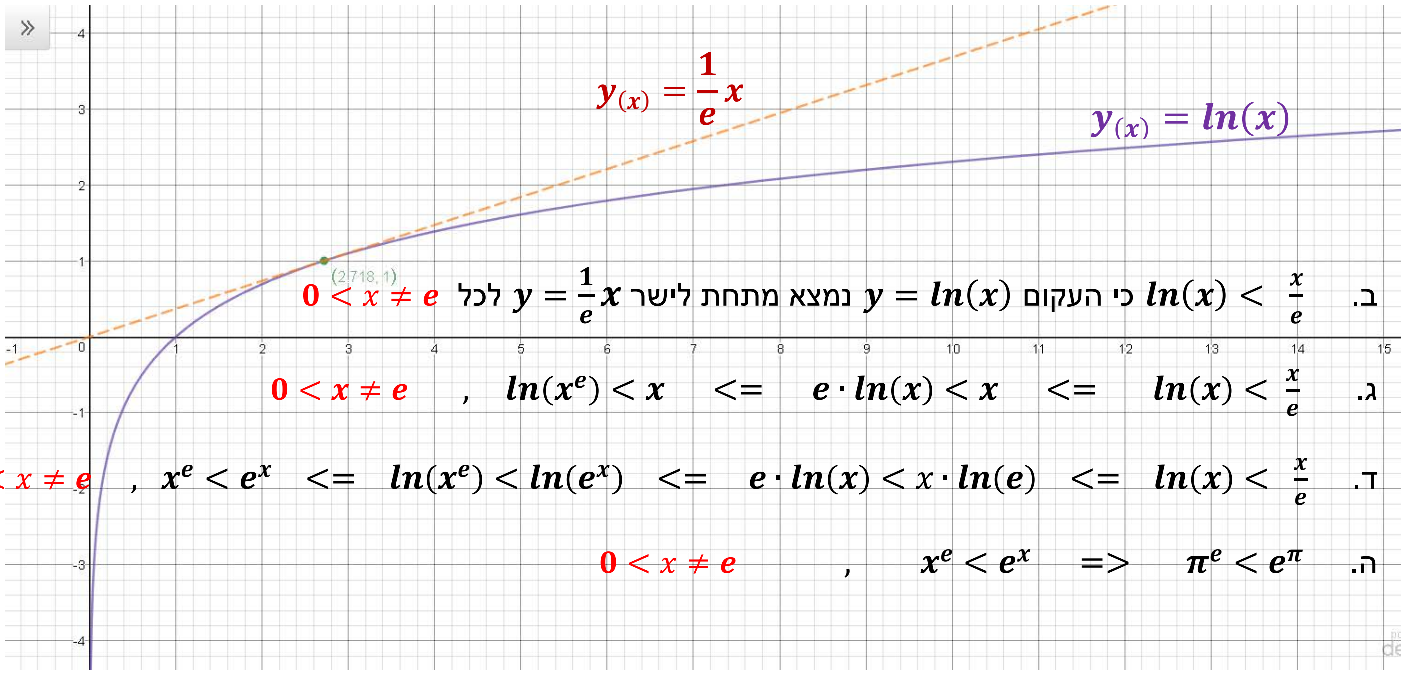
פיתרון:

$$y_{(x)} = ln(x) \quad => \quad y'_{(x)} = \frac{1}{x} \quad => \quad m = y'_{(x_0)} = \frac{1}{x_0} \quad , \quad (x_0, ln(x_0)) \;\; tangent\ point$$

$$\text{from Analitical geometry:} \quad m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad => \quad m = \frac{\ln(x_0) - 0}{x_0 - 0} = \frac{\ln(x_0)}{x_0}$$

$$\frac{1}{x_0} = \frac{\ln(x_0)}{x_0} \quad => \quad \ln(x_0) = 1 \quad => \quad x_0 = e \quad => \quad (e, 1) \;\; tangent\ point$$

$$m = \frac{1}{x_0} = \frac{1}{e} \quad , \quad y - y_0 = m(x - x_0) \quad => \quad y - 1 = \frac{1}{e}(x - e) \quad => \quad y = \frac{1}{e}x$$



ב. $ln(x) < \frac{x}{e}$ כי העקום $y = ln(x)$ נמצא מתחת לישר $y = \frac{1}{e}x$ לכל $0 < x \neq e$

ג. $ln(x) < \frac{x}{e} \quad => \quad e \cdot ln(x) < x \quad => \quad ln(x^e) < x \quad , \quad 0 < x \neq e$

ד. $ln(x) < \frac{x}{e} \quad => \quad e \cdot ln(x) < x \cdot ln(e) \quad => \quad ln(x^e) < ln(e^x) \quad => \quad x^e < e^x \quad , \quad 0 < x \neq e$

ה. $\pi^e < e^\pi \quad <= \quad x^e < e^x \quad , \quad 0 < x \neq e$

3. המשפט היסודי

נתון: $F(x) > 0$, $b > 1$. השטח הכלוא בין $F(x)$ לבין ציר ה-x בתחום שבין x=1 לבין x=b נתון על ידי הביטוי $\sqrt{b^2+1}+C$. מצא את $F(x)$ (15 נק') ואת C. את C עליך למצוא בשתי דרכים שונות (5 כפול 2=10 נק').

<u>פיתרון:</u>

$$G_{(x)} = \int_1^x F_{(t)}dt = \sqrt{x^2+1}+C$$

הדרך הראשונה למציאת C היא באמצעות איפוס האינטגרל ע"י הצבת $x = 1$:

$$G_{(1)} = 0 = \sqrt{1^2+1}+C \quad => \quad C = -\sqrt{2}$$

כעת למציאת $F_{(x)}$:

$$G_{(x)} = \int_1^x F_{(t)}dt = \sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}$$

$$\frac{d}{dx}G_{(x)} = \frac{d}{dx}\int_1^x F_{(t)}dt = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}\right)$$

$$\frac{d}{dx}G_{(x)} = F_{(x)} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

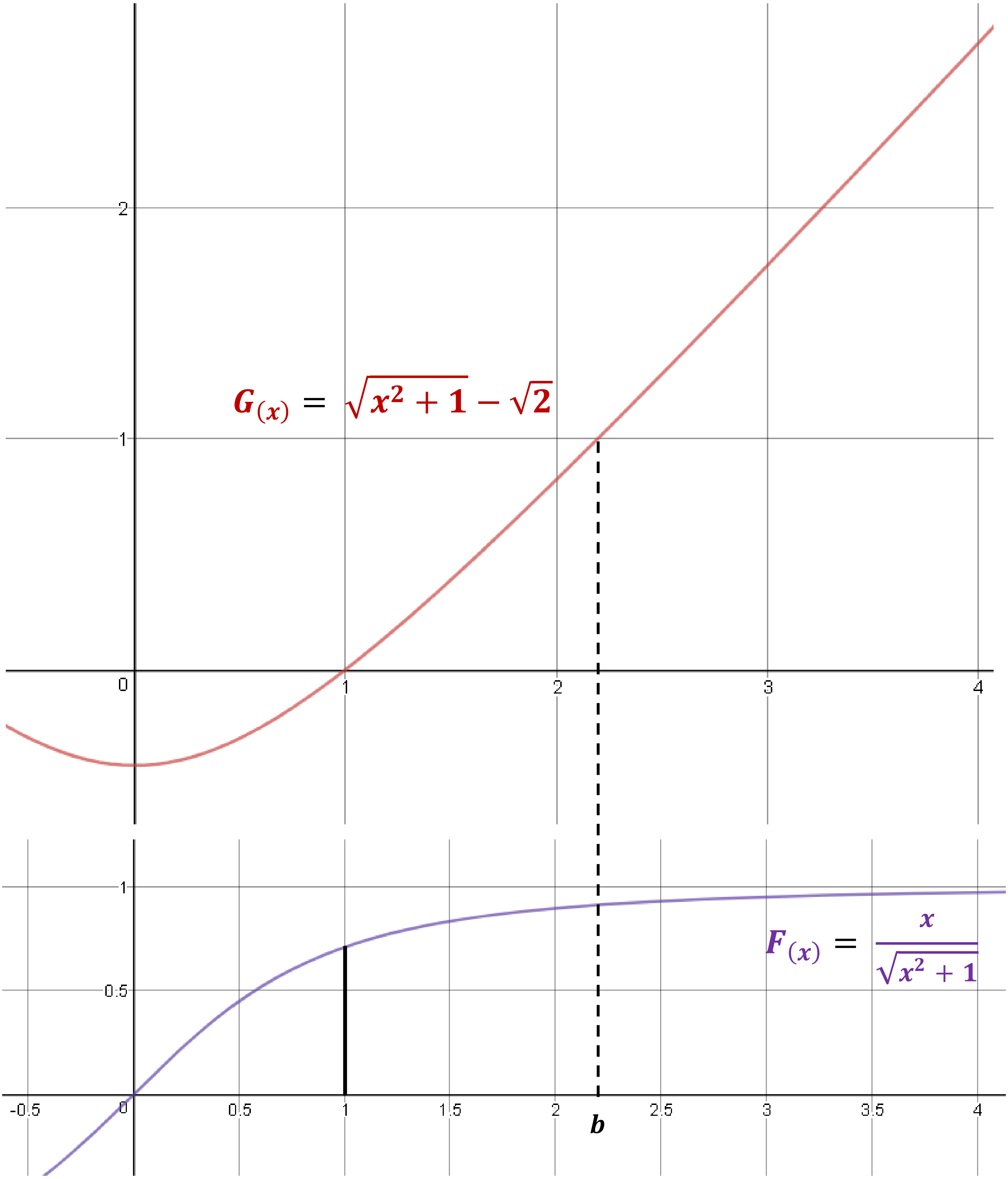
הדרך השנייה למציאת C היא באמצעות אינטגרציה מפורשת של $F_{(t)}$ וזיהוי של הקבוע C:

$$G_{(x)} = \int_1^x \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt = \sqrt{t^2+1}\Big|_1^x = \sqrt{x^2+1}-\sqrt{2} \quad => \quad C = -\sqrt{2}$$

בעמוד הבא מובא תיאור גרפי אשר עוזר להבין את משמעות האינטגרל שקיבלנו:

$G_{(x)}$ היא הפונקציה הקדומה של $F_{(x)}$. בגרף ניתן לראות ש- $G_{(x)}$ חיובית עבור $x > 1$ ומתארת את השטח אשר מצטבר תחת הגרף של $F_{(x)}$ החל ב- $x = 1$, שהינו הגבול התחתון של האינטגרל הנתון.

הגבול העליון של האינטגרל, b , נבחר להיות בגרף 2.2 בערך. עבור ערך זה של b נכלאת תחת $F_{(x)}$ יחידת שטח אחת, ובהתאם מקבלת אז $G_{(x)}$ את הערך **1**. עבור ערכים גדולים של b, מתייצבת $F_{(x)}$ על הערך **1**. השטח תחתיה גדל אז בקצב קבוע של יחידת שטח אחת עבור כל תזוזה ימינה של **1** יח' אורך. מעיד על כך **שיפועה** של $G_{(x)}$, אשר גדל לכדי **1** ומתייצב על ערך מרבי זה.


$G_{(x)} = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}$
$F_{(x)} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
b
2
1
0
1
2
3
4
1
0.5
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4

4. על אינטגרל ורציפות

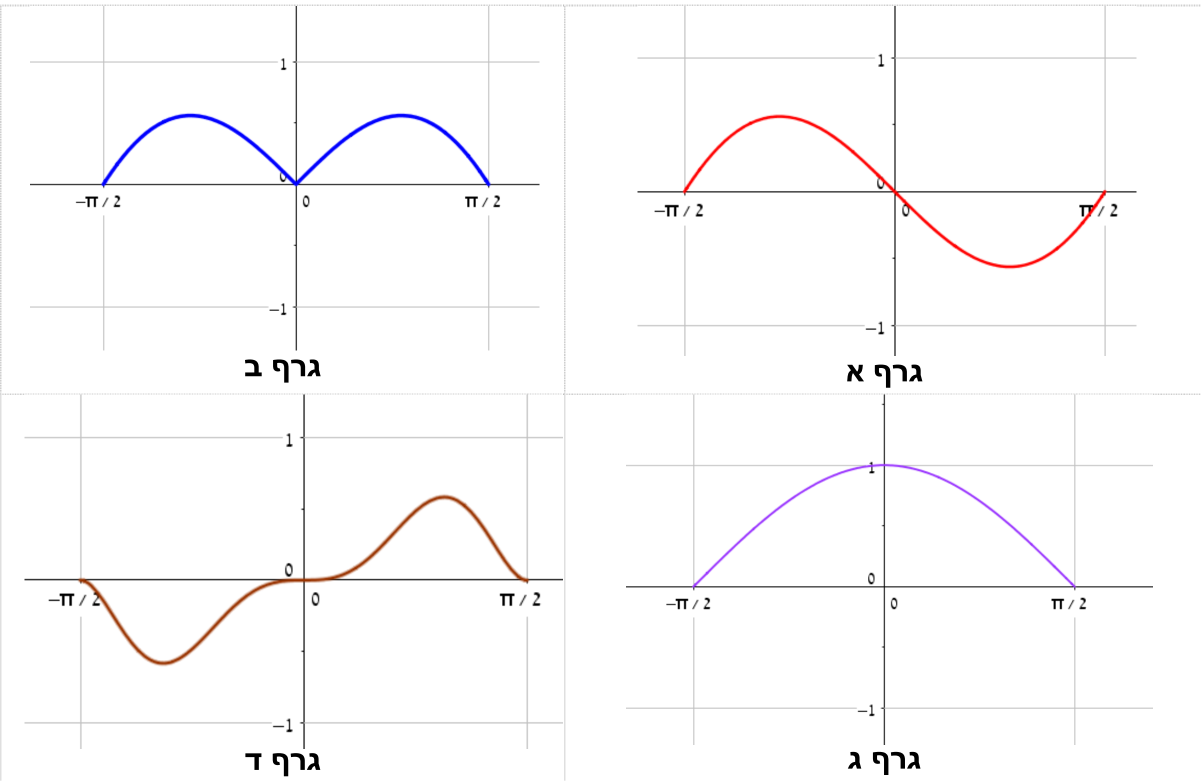
א. הוכח כי $\int_0^1 f_{(x)}dx = \int_0^1 f_{(1-x)}dx$ (10 נק').

ב. נתונה הפונקציה $f(x) = |x|cosx$

ב1: האם הפונקציה רציפה ב-x=0? הסבר (5 נק').

ב2: האם הפונקציה גזירה ב-x=0? הסבר (5 נק').

ב3: מי מהגרפים הבאים מתאר את $f(x)$ בתחום $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. העתק את הגרף למחברת הבחינה. (5 נק').



<u>פיתרון א':</u>

צ"ל: $\int_0^1 f_{(x)}dx = \int_0^1 f_{(1-x)}dx$

$$\int_0^1 f_{(1-x)}dx \;=>\; \begin{cases} u = 1 - x \\ du = -dx \end{cases} \;=\; -\int_{u=1}^{u=0} f_{(u)}du \;=\; \int_0^1 f_{(u)}du \;=\; \int_0^1 f_{(x)}dx$$

<u>פיתרון ב1:</u>

$$f_{(x)} = |x|cosx = \begin{cases} x \cdot cosx & 0 \le x \\ -x \cdot cosx & x < 0 \end{cases} \;=>\; \lim_{x \to 0^-} f_{(x)} = f_{(0)} = \lim_{x \to 0^+} f_{(x)} = 0$$

הפונקציה רציפה ב- $x = 0$ משום שהגבולות החד-צדדיים שווים לערך הפונקציה.

<u>פיתרון ב2:</u>

$$f'_{(x)} = \begin{cases} cosx - x \cdot sinx & 0 < x \\ x \cdot sinx - cosx & x < 0 \end{cases} \;=>\; \lim_{x \to 0^-} f'_{(x)} = -1 \ne \lim_{x \to 0^+} f'_{(x)} = 1$$

הפונקציה אינה גזירה ב- $x = 0$ משום שהגבולות החד-צדדיים של הנגזרת שונים זה מזה..

<u>פיתרון ב3:</u>

גרף ב' מתאים לתוצאות שני הסעיפים הקודמים – "פינה" ב- $x = 0$ אשר משמעה אי- גזירות ועם זאת רציפות.

5. שימושי האינטגרל – חישוב אורך קשת

מצא את אורכה של העקומה y, המוגדרת על ידי, $y=\int_0^x \sqrt{cos2t}\cdot dt$, בתחום $0\le x\le \pi/4$.

$$y=\int_0^x \sqrt{cos2t}\cdot dt \quad => \quad \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\int_0^x \sqrt{cos2t}\cdot dt = \sqrt{cos2x}$$

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{1+\sqrt{cos2x}^2}\,dx = \sqrt{1+|cos2x|}$$

$$0\le cos2x \quad for \quad 0\le x\le \pi/4$$

$$\int_0^{\pi/4}\sqrt{1+cos2x}\cdot dx = \int_0^{\pi/4}\sqrt{1+2cos^2x-1}\cdot dx = \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} cosx\cdot dx =$$

$$= \sqrt{2}sinx\Big|_0^{\pi/4} = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$