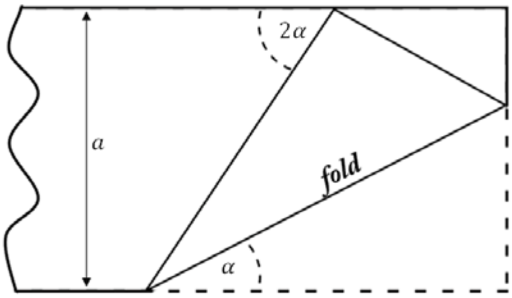
1. שימושי הנגזרת



מקפלים את הפינה התחתונה של סרט מלבני כך שהיא נוגעת בשפה העליונה של הסרט.

רוחבו של הסרט נתון - a.

מצא את אורכו המינימאלי האפשרי של קו הקיפול (מסומן על ידי המילה fold בציור).

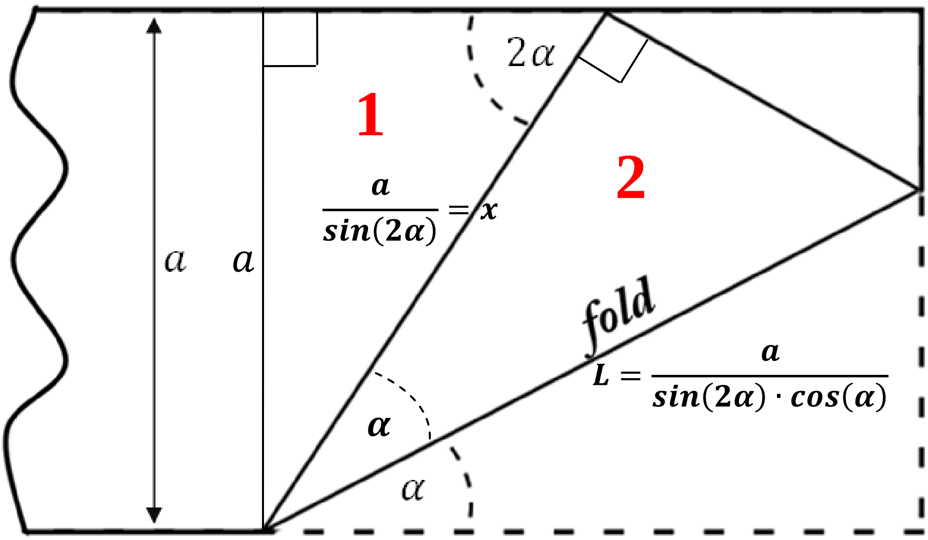
רמז: נסה לבטא את אורך הקיפול L בעזרת הזווית α שבין קו הקיפול לקו המרוסק האופקי.

שים לב כי קו הקיפול הוא אלכסון בדלתון.

ביטוי של אורך הקיפול כתלות במשתנה α – 10 נקו'.

גזירה נכונה ומציאת אורך הקיפול L – 10 נקו'. הסבר מדוע קיבלת מינימום – 5 נקו'.

<u>פיתרון:</u>



באיור משמאל מתוארת השתלשלות האירועים:

היתר של מי"ז 1 מתקבל מחלוקת הניצב a בסינוס הזווית שמולו (2α).

יתר זה של מי"ז 1 הוא ניצב של מי"ז 2. נכנהו x.

היתר של מי"ז 2 (L) מתקבל מחלוקת הניצב x בקוסינוס הזווית שלידו (α).

$$L_{(\alpha)}=\frac{a}{\sin(2\alpha)\cdot\cos(\alpha)} \quad => \quad \frac{dL}{d\alpha}=\frac{-a}{\sin^2(2\alpha)\cdot\cos^2(\alpha)}\cdot[2\cos(2\alpha)\cdot\cos(\alpha)-\sin(2\alpha)\cdot\sin(\alpha)]$$

$$\frac{dL}{d\alpha}=0 \quad => \quad 2\cos(2\alpha)\cdot\cos(\alpha)-\sin(2\alpha)\cdot\sin(\alpha)=0 \quad =>$$

$$=> \quad 2\cos(2\alpha)\cdot\cos(\alpha)=\sin(2\alpha)\cdot\sin(\alpha) \quad => \quad 2\cot(2\alpha)=tg(\alpha) \quad => \quad \frac{2}{tg(2\alpha)}=tg(\alpha) \quad =>$$

$$tg(2\alpha)=\frac{2tg(\alpha)}{1-tg^2(\alpha)} \quad => \quad \frac{2\left(1-tg^2(\alpha)\right)}{2tg(\alpha)}=tg(\alpha) \quad => \quad 1-tg^2(\alpha)=tg^2(\alpha) \quad =>$$

$$=> \quad 2tg^2(\alpha)=1 \quad => \quad tg^2(\alpha)=\frac{1}{2} \quad => \quad tg(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad => \quad \alpha=0.61548$$

$$L_{(\alpha)}=\frac{a}{\sin(2\alpha)\cdot\cos(\alpha)} \quad => \quad L_{(0.61548)}=\frac{a}{\sin(1.231)\cdot\cos(0.61548)}=\frac{a}{0.77}\approx 1.3a$$

התקבל מינימום עבור $\alpha=0.61548$ כי $L\to\infty$ כאשר $\alpha\to 0$ ו- $L=\sqrt{2}a$ (אלכסונו של ריבוע) כאשר $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

כאשר $\frac{\pi}{4}<\alpha\le\frac{\pi}{2}$ הפונקציה $L_{(\alpha)}=\frac{a}{\sin(2\alpha)\cdot\cos(\alpha)}$ אינה תקפה עוד כי הגיאומטריה של הבעיה שונה (אין זה דלתון),

אך ברור ש $L\to a$ כאשר $\alpha\to\frac{\pi}{2}$ (המתחכמים יאמרו **שזהו** אורכו המינימאלי של L, אך לא לכך התכוון המשורר).

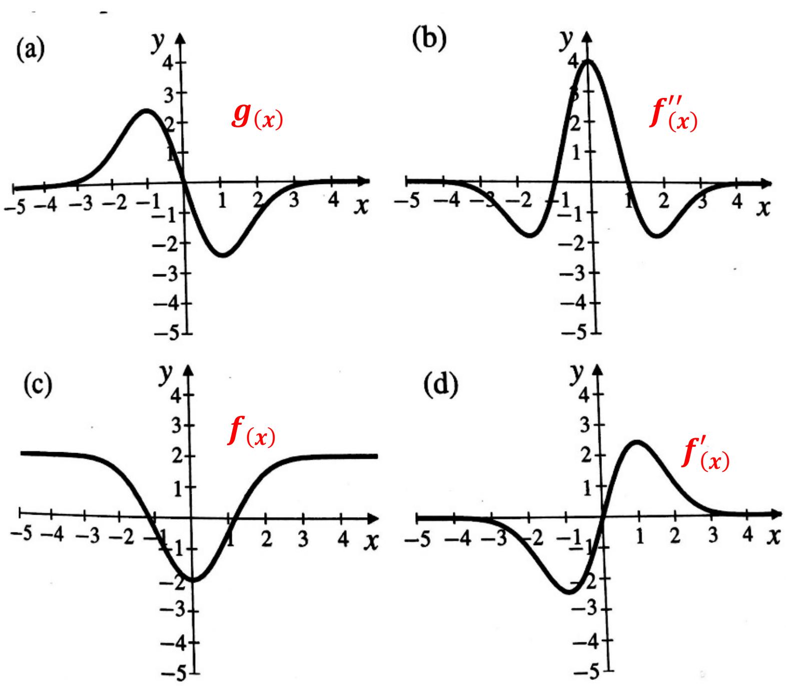
כאשר $\frac{\pi}{2}<\alpha$, הפינה התחתונה של הסרט המלבני אינה נוגעת בשפה העליונה שלו, ולכן אין מה לדון בכך.

2. חקירת פונקציה

הציור מתאר ארבעה גרפים. אחד מהם הוא הפונקציה f(x), גרף אחר מתאר את f '(x), גרף נוסף מתאר את f ''(x), וישנו גם גרף של פונקציה אחרת g(x). מי מתייחס לכל אחד מהארבעה. תן נימוקים לבחירתך.

בחירה נכונה של g – 4 נקו'. בחירה נכונה ומנומקת עבור כל אחד מהשאר – 7 כפול 3 = 21 .

<u>פיתרון:</u> (כדי לחסוך במקום, רשומות התשובות (**באדום**) בגוף הציור הנתון)



גרף **c** מתאר את $f_{(x)}$.
כאשר $x \to -\infty$ השיפוע שואף לאפס "מלמטה".
עבור $x < -1$ השיפוע שלילי והגרף קמור.
עבור $-1 < x < 0$ השיפוע שלילי והגרף קעור.
ב- $x = 0$ השיפוע מתאפס.
עבור $0 < x < 1$ השיפוע חיובי והגרף קעור.
עבור $1 < x$ השיפוע חיובי והגרף קמור.
כאשר $x \to +\infty$ השיפוע שואף לאפס "מלמעלה".

גרף **d** מתאר את $f'_{(x)}$ - השיפוע של $f_{(x)}$.
כאשר $x \to -\infty$ הגרף שואף לאפס "מלמטה".
עבור $x < -1$ הגרף שלילי מתחזק.
עבור $-1 < x < 0$ הגרף שלילי נחלש.
ב- $x = 0$ הגרף מתאפס.
עבור $0 < x < 1$ הגרף חיובי מתחזק.
עבור $1 < x$ הגרף חיובי נחלש.
כאשר $x \to +\infty$ הגרף שואף לאפס "מלמעלה".

גרף **b** מתאר את $f''_{(x)}$ - קעירות וקמירות של $f_{(x)}$.
כאשר $x \to -\infty$ הגרף שואף לאפס "מלמטה".
עבור $x < -1$ הגרף שלילי (קמירות).
עבור $-1 < x < 0$ הגרף חיובי (קעירות).
ב- $x = 0$ הגרף בשיאו החיובי – שיא הקעירות.
עבור $0 < x < 1$ הגרף חיובי (קעירות).
עבור $1 < x$ הגרף שלילי (קמירות).
כאשר $x \to +\infty$ הגרף שואף לאפס "מלמטה".

3. אינטגרל + בעיית מקסימיזציה בעזרת המשפט היסודי

א. פתור את $\int \frac{dx}{(4+x)\sqrt{x}}$ (10 נק')

פיתרון:

$$\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x}} = 2\int \frac{dx}{(x+4)\cdot 2\sqrt{x}} \rightarrow \begin{cases} u=\sqrt{x} \\ du=\frac{dx}{2\sqrt{x}} \end{cases} = 2\int \frac{du}{(u^2+4)} = 2\int \frac{du}{4\left[\left(\frac{u}{2}\right)^2+1\right]} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{\left(\frac{u}{2}\right)^2+1} \rightarrow \begin{cases} t=\frac{u}{2} \\ dt=\frac{du}{2} \end{cases} = \int \frac{dt}{t^2+1} = arctg(t)+C = arctg\left(\frac{u}{2}\right)+C = arctg\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)+C$$

ב. מהו הערך המינימאלי של $F(x)=\int_0^{x^2-2x}\frac{1}{1+t^2}dt$ (10 נק').

האם ל- $F(x)$ יש ערך מקסימאלי? נמק (5 נק').

פיתרון:

ברור שהאינטגרל מתאפס כאשר $x^2-2x=0$, ז"א כאשר $x=0$ או $x=2$, כי אז הגבולות שווים זה לזה.

האינטגרנד $\frac{1}{1+t^2}$ חיובי לכל t, ונשאלת השאלה - האם בתנאי זה יכול ערכו של האינטגרל להיות **קטן** מאפס.

התשובה היא כן - בתנאי שהגבול העליון קטן מזה התחתון.

זאת ועוד, ככל שיהא הגבול העליון קטן יותר מזה התחתון, יהא ערכו של האינטגרל "שלילי יותר".

"כמה שלילי" יכול הגבול העליון להיות? מהו הערך המינימאלי של $g_{(x)}=x^2-2x$?

זוהי פרבולה "מחייכת" אשר קודקודה הוא $(x_k,y_k)=\left(\frac{-b}{2a},y_k\right)=(1,-1)$, ואם כך הערך המינימאלי שיכול הגבול העליון לקבל הינו $g_{(1)}=-1$. נציב ערך זה כגבול העליון של האינטגרל ונחשב את ערכו:

$$F(x) = \int_0^{-1}\frac{1}{1+t^2}dt = arctg(t)\Big|_0^{-1} = arctg(-1)-arctg(0) = -\frac{\pi}{4}-0 = -\frac{\pi}{4}$$

דרך אחרת היא להיעזר במשפט היסודי לצורך גזירתה של $F(x)$, ואז למצוא את x_k באמצעות איפוס הנגזרת:

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_0^{x^2-2x}\frac{1}{1+t^2}dt = \frac{d}{du}\int_0^{u}\frac{1}{1+t^2}dt\cdot\frac{du}{dx} = \frac{1}{1+u^2}\cdot(2x-2) = \frac{2x-2}{1+(x^2-2x)^2} = 0$$

$$2x-2=0 \quad => \quad x_{min}=x_k=1 \quad => \quad \ldots..$$

כדי לדעת אם ל- $F(x)$ יש ערך מקסימאלי, עלינו "להציב אינסוף" בגבול העליון של האינטגרל:

$$F(x) = \int_0^{\infty}\frac{1}{1+t^2}dt = arctg(t)\Big|_0^{\infty} = arctg(\infty)-arctg(0) = \frac{\pi}{2}-0 = \frac{\pi}{2}$$

4. סכום רימן (Riemann) + המשפט היסודי

א. היעזר בסכום רימן כדי להמיר את הביטוי $lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\sqrt{1+\frac{k}{n}}$ לאינטגרל מסוים בתחום [0,1] ולחשב את ערכו. (10 נקו').

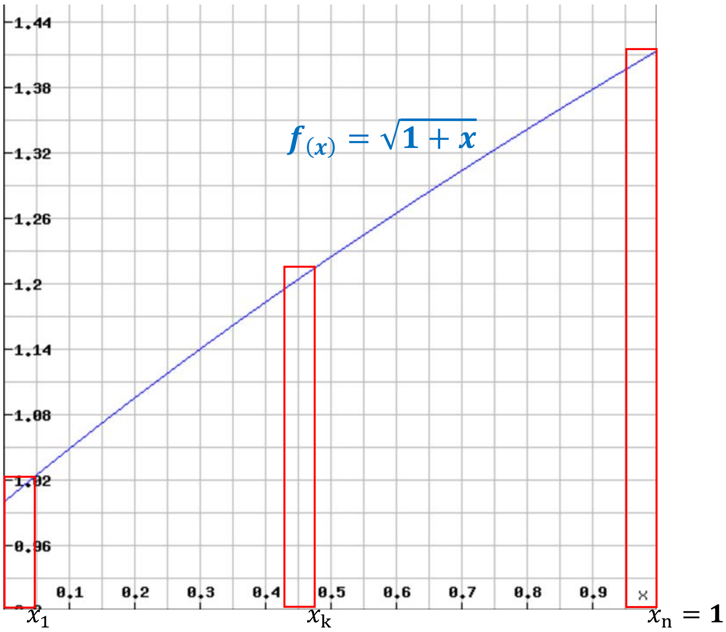
<u>פיתרון:</u>

חלוקת התחום [0,1] ל- n תת-אינטרוולים משמעו

$$x_1=\Delta x \quad , \quad x_2=2\Delta x \quad , \quad x_3=3\Delta x \ ,\ldots\ldots , \quad x_k=k\Delta x \ ,\ldots\ldots\ldots , \quad x_n=n\Delta x=1$$

וכמו כן

$$\frac{1}{n}=\Delta x \quad => \quad \frac{k}{n}=k\Delta x=x_k \quad => \quad \frac{1}{n}\cdot\sqrt{1+\frac{k}{n}} = \Delta x\cdot\sqrt{1+x_k} = f_{(X_k)}\cdot\Delta x$$



x_k הוא קצהו הימני של תת-האינטרוול ה-"k"י", ולכן $f_{(x_k)}=\sqrt{1+x_k}$ הוא גובהו של המלבן ה-"k"י".
רוחבו של כל מלבן הוא Δx , ולכן שטחו של המלבן ה-"k"י הוא $A_k=f_{(x_k)}\cdot\Delta x$. באופן מפורט:

$$A_1 = f_{(X_1)}\cdot\Delta x = \sqrt{1+x_1}\cdot\Delta x$$
$$A_2 = f_{(X_2)}\cdot\Delta x = \sqrt{1+x_2}\cdot\Delta x$$
$$A_3 = f_{(X_3)}\cdot\Delta x = \sqrt{1+x_3}\cdot\Delta x$$
$$\vdots$$
$$A_k = f_{(X_k)}\cdot\Delta x = \sqrt{1+x_k}\cdot\Delta x$$
$$\vdots$$
$$A_n = f_{(X_n)}\cdot\Delta x = \sqrt{1+x_n}\cdot\Delta x$$

נרשום ביטוי לסכום שטחי n המלבנים.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+x_k}\cdot\Delta x$$

תחת התנאי $n\to\infty$ נוכל להחליפו באינטגרל:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+x_k}\cdot\Delta x = \int_0^1\sqrt{1+x}\cdot dx$$

$$\int_0^1\sqrt{x+1}\cdot dx \to \begin{cases} u=x+1 \\ du=dx\end{cases} = \int_1^2\sqrt{u}\cdot du = \frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_1^2 = \frac{2}{3}\left(2^{3/2}-1\right)$$

ב. פתור את המשוואה $2y(x)+1=3\int_x^1 y(t)dt$ ומצא את $y(x)$. (15 נקו').

<u>פיתרון:</u>

ראשית נציב $x=1$ כדי לאפס את אגף ימין וכך לגלות כי

$$2y_{(1)}+1=0 \quad => \quad y_{(1)}=-\frac{1}{2}$$

כעת ניגש לפתרון כללי של המשוואה הנתונה, ז"א עד כדי קבוע:

$$2y_{(x)}+1=3\int_x^1 y_{(t)}dt \quad => \quad 2y_{(x)}+1=-3\int_1^x y_{(t)}dt$$

$$\frac{d}{dx}\left[2y_{(x)}+1\right]=-3\frac{d}{dx}\int_1^x y_{(t)}dt$$

$$2\frac{d}{dx}y_{(x)} = -3y_{(x)}$$

$$2\frac{dy}{y} = -3dx$$

$$2\int\frac{dy}{y} = -3\int dx$$

$$2ln|y|=-3x+c$$

$$ln|y|=\frac{-3x+c}{2}$$

$$\left|y_{(x)}\right|=e^{\frac{-3x+c}{2}}$$

כעת נציב $y_{(1)}=-\frac{1}{2}$ כדי למצוא את C :

$$\left|y_{(1)}\right|=e^{\frac{-3+c}{2}}=\frac{1}{2} \quad => \quad \frac{-3+c}{2}=ln\frac{1}{2}=-ln2 \quad => \quad -3+c=-2ln2 \quad => \quad c=3-2ln2$$

$$\left|y_{(x)}\right| = e^{\frac{-3x+3-2ln2}{2}} = e^{\frac{-3x+3}{2}}\cdot e^{\frac{-2ln2}{2}} = e^{-\frac{3}{2}(x-1)}\cdot e^{-ln2} = e^{-\frac{3}{2}(x-1)}\cdot e^{ln\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}(x-1)}$$

כדי לקיים $y_{(1)}=-\frac{1}{2}$, נסיר את הערך המוחלט מאגף שמאל תוך הכפלת אגף ימין ב- (-1) :

$$y_{(x)}=-\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}(x-1)}$$

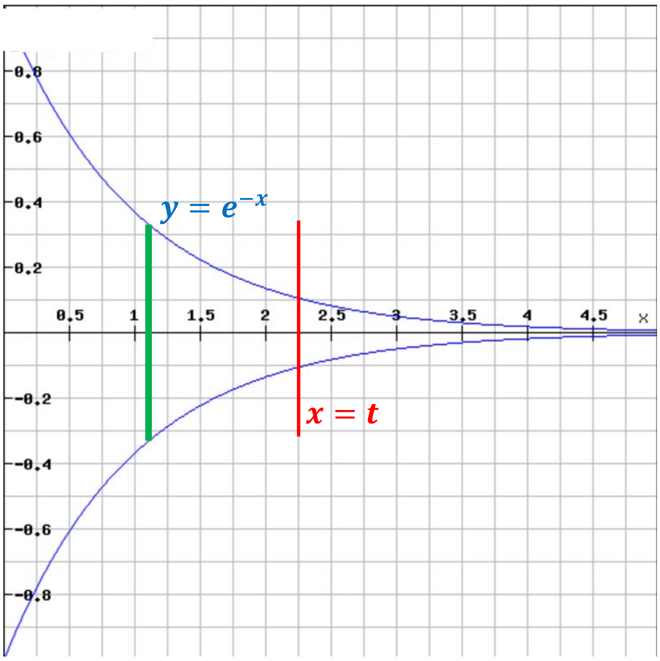
5. שימושי האינטגרל

נסמן על ידי A(t) את השטח ברביע הראשון הכלוא בין הצירים, העקומה $y = e^{-x}$ והקו האנכי x=t, t>0.

נסמן על ידי V(t) את נפח הגוף הנוצר על ידי סיבוב השטח הכלוא סביב ציר x. מצא את הגבולות:

א. $\lim_{t\to\infty} A(t)$ (5 נקו') **ב.** $\lim_{t\to\infty} V(t)/A(t)$ (10 נקו') **ג.** $\lim_{t\to 0^+} V(t)/A(t)$ (10 נקו')

<u>פיתרון א:</u>



$$A_{(t)} = \int_0^t e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^t = -(e^{-t}-1) = 1-e^{-t}$$

$$\lim_{t\to\infty} A_{(t)} = \lim_{t\to\infty}(1-e^{-t}) = 1$$

<u>פיתרון ב:</u>

חישוב $V_{(t)}$ בשיטת הדיסקות:

$$dV_{(x)} = \pi r^2 dx = \pi(e^{-x})^2 dx = \pi e^{-2x} dx$$

$$V_{(t)} = \pi\int_0^t e^{-2x}\,dx = -\frac{\pi}{2}\Big[e^{-2x}\Big|_0^t =$$

$$= -\frac{\pi}{2}(e^{-2t}-1) = \frac{\pi}{2}(1-e^{-2t})$$

$$\frac{V_{(t)}}{A_{(t)}} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1-e^{-2t}}{1-e^{-t}} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(1-e^{-t})(1+e^{-t})}{1-e^{-t}} = \frac{\pi}{2}\cdot(1+e^{-t}) \quad => \quad \lim_{t\to\infty}\frac{V_{(t)}}{A_{(t)}} = \frac{\pi}{2}\cdot\lim_{t\to\infty}(1+e^{-t}) = \frac{\pi}{2}$$

<u>פיתרון ג:</u>

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{V_{(t)}}{A_{(t)}} = \frac{\pi}{2}\cdot\lim_{t\to 0^+}(1+e^{-t}) = \pi$$