1. על גבולות והמשפט היסודי

א. מצא את הערכים של a ו-b כך ש- $\boldsymbol{lim_{x\to 0}\frac{a\cdot cos(x)-cos(bx)}{x^2}=4}$, הסבר את שיקוליך (12 נק')

<u>פיתרון:</u>

שלב א' בקיצור, דרך הבנה:

כאשר $x\to 0$ המונה גדול פי 4 מהמכנה, ז"א כאשר $x\to 0$ מתקיים $\boldsymbol{a\cdot cos(x)-cos(bx)=4x^2}$

שלב א' בדרך פורמאלית:

גבול של מנה שווה למנת הגבולות:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{a\cdot cos(x)-cos(bx)}{x^2}=4 \quad => \quad \frac{\lim\limits_{x\to 0}[a\cdot cos(x)-cos(bx)]}{\lim\limits_{x\to 0}[x^2]}=4}$$

גבול של הפרש שווה להפרש הגבולות:

$$\boldsymbol{\frac{\lim\limits_{x\to 0}a\cdot cos(x)-\lim\limits_{x\to 0}cos(bx)}{\lim\limits_{x\to 0}x^2}=4}$$

הכפלת שני האגפים ב- $\lim_{x\to 0}x^2$:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}a\cdot cos(x)-\lim_{x\to 0}cos(bx)=4\lim_{x\to 0}x^2}$$

שלב ב':

נציב $x\to 0$ ונקבל :

$$\boldsymbol{a\cdot cos(0^{\pm})-cos(b\cdot 0^{\pm})=4\cdot(0^{\pm})^2 \;=>\; a\cdot 1^- -1^- =0^+ \;=>\; a^- =0^+ +1^- \;=>\; a=1}$$

שלב ג':

נציב $\boldsymbol{a=1}$ בביטוי הנתון ונקבל $\left[\frac{0}{0}\right]$, כך שאפשר להפעיל כלל לופיטל:

:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{cos(x)-cos(bx)}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=4 \;\to\; Lopital \;=>\; \lim_{x\to 0}\frac{-sin(x)+b\cdot sin(bx)}{2x}=4 \;=>}$$

ממשיך תוך שימוש בשוויון $\boldsymbol{lim_{x\to 0}\,sin(ax)=ax}$

$$\boldsymbol{=> \;\lim_{x\to 0}\frac{-x+b\cdot bx}{2x}=4 \;=>\; \lim_{x\to 0}\frac{(-1+b^2)x}{2x}=4 \;=>\; b^2=9 \;=>\; b=\pm 3}$$

בשביל הספורט - בדיקת התשובה תוך שימוש בזהות $\boldsymbol{cos(\alpha)-cos(\beta)=-2\cdot sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{cos(x)-cos(3x)}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=-2\lim_{x\to 0}\frac{sin(2x)\cdot sin(-x)}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{sin(2x)\cdot sin(x)}{x^2}=}$$

$$\boldsymbol{=2\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{2}{1}=4}$$

ב. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $\boldsymbol{f(x) = 2 - \int_2^{x^2+1} \frac{9}{1+t} dt}$ בנקודה x=1. (13 נק')

<u>פיתרון:</u>

עלינו למצוא את $f_{(1)}$ כך שתהיה בידינו נקודה (x_1, y_1) על המשיק, ואת $f'_{(1)}$ כך שנדע את שיפועו m.

כדי למצוא את $f_{(c)}$ עבור c שרירותי כלשהו, עלינו למצוא ראשית את $f_{(x)}$, ולשם כך נדרש חישוב האינטגרל.

כאן, בשל היות $c = 1$, שווים גבולות האינטגרציה זה לזה והאינטגרל מתאפס:

$$f(1) = 2 - \int_2^{1^2+1} \frac{9}{1+t} dt = 2 - \int_2^{2} \frac{9}{1+t} dt = 2 - 0 = 2 \quad => \quad (x_1, y_1) = (1, 2)$$

בכל זאת נחשב את האינטגרל עבור המקרה הכללי שבו $c \neq 1$ כדי לקבל את $f_{(x)}$, ומ-$f_{(x)}$ נקבל את $f_{(1)}$:

$$\int_2^{x^2+1} \frac{9}{1+t} dt = 9ln|t+1| \Big|_2^{x^2+1} = 9\{ln|x^2+1+1| - ln|2+1|\} = 9ln\frac{x^2+2}{3}$$

$$f_{(x)} = 2 - 9ln\frac{x^2+2}{3} \quad => \quad f_{(1)} = 2 - 9ln1 = 2 \quad => \quad (x_1, y_1) = (1, 2)$$

כדי למצוא את $f'_{(1)}$, עלינו למצוא ראשית את $f'_{(x)}$.

אנו יכולים לגזור את $f_{(x)}$ בצורתה המפורשת - זו ש"בכל זאת" טרחנו למצוא:

$$f_{(x)} = 2 - 9ln\frac{x^2+2}{3} \quad => \quad f'_{(x)} = 0 - 9\frac{3}{x^2+2} \cdot \frac{2x}{3} = -18\frac{x}{x^2+2}$$

או לגזור את הפונקציה כפי שהיא נתונה, תוך שימוש במשפט היסודי:

$$f(x) = 2 - \int_2^{x^2+1} \frac{9}{1+t} dt$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = 0 - \frac{d}{dx}\int_2^{x^2+1} \frac{9}{1+t} dt = -\frac{d}{du}\int_2^{u} \frac{9}{1+t} dt \cdot \frac{du}{dx} = -\frac{9}{1+u} \cdot \frac{du}{dx} = -\frac{9}{1+x^2+1} \cdot 2x = -18\frac{x}{x^2+2}$$

$$m = f'_{(1)} = -18\frac{1}{1^2+2} = -6$$

כעת יש בידינו נקודה על המשיק $(x_1, y_1) = (1, 2)$ ויש לנו גם את שיפועו $m = -6$

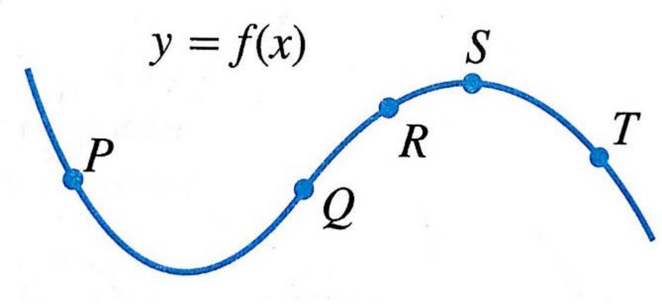
נשתמש כעת בנוסחה למציאת משוואתו של ישר, כאשר ידועה נקודה שעליו וידוע שיפועו:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = -6(x - 1) \quad => \quad y = -6x + 8$$

2. חקירת פונקציות

א. בציור נתון קטע גרפי של פונקציה גזירה. העתק את הטבלה למחברת הבחינה והגדר את סימני הנגזרות בנקודות המבוקשות כחיובי/שלילי/אפס (10 נק').

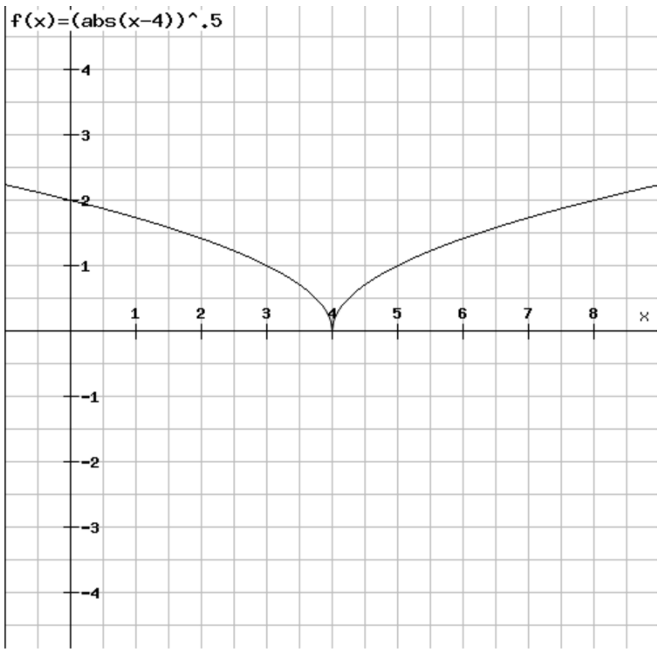


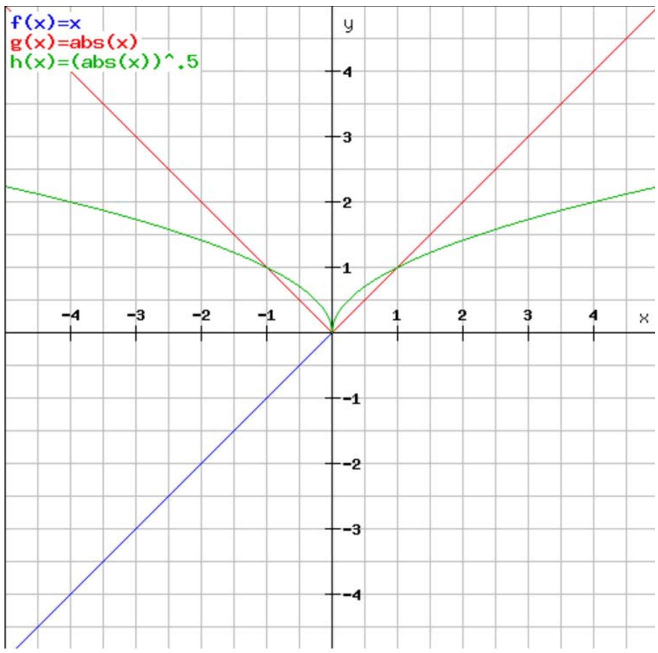
נקודה	y'	y''
P	*שלילי (ירידה)*	*חיובי (קעירות)*
Q	*חיובי (עליה)*	*אפס (פיתול)*
R	*חיובי (עליה)*	*שלילי (קמירות)*
S	*אפס (מקסימום)*	*שלילי (קמירות)*
T	*שלילי (ירידה)*	*שלילי (קמירות)*

ב. שרטט את גרף הפונקציה $f(x) = \sqrt{|(x-4)|}$. רמז: אין צורך בנגזרות אם הנך מסתמך על פרק ההקדמה בספר הלימוד. הסבר את שיקוליך. הצבה בעזרת מחשבון כיס ו/או גרף ללא הסבר לא תתקבל (15 נק').

פיתרון:

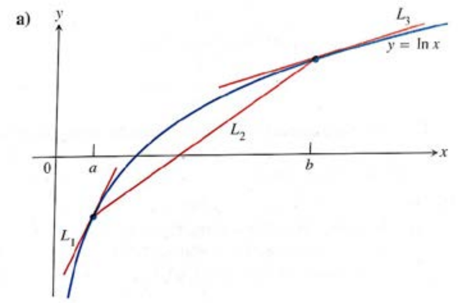
משרטט $\boldsymbol{y = x}$ (אדום-כחול), משקף החלק השלילי מעלה ומקבל $\boldsymbol{y = |x|}$ (אדום), מפעיל שורש ומקבל $\boldsymbol{y = \sqrt{|x|}}$ (ירוק), מזיז 4 יחידות ימינה ומקבל $\boldsymbol{y = \sqrt{|(x-4)|}}$ (שחור נפרד).

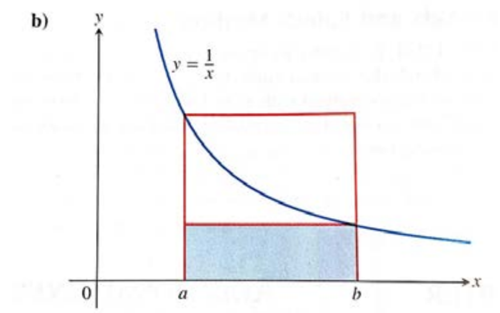




3. הנגזרת + האינטגרל Napier's Inequality

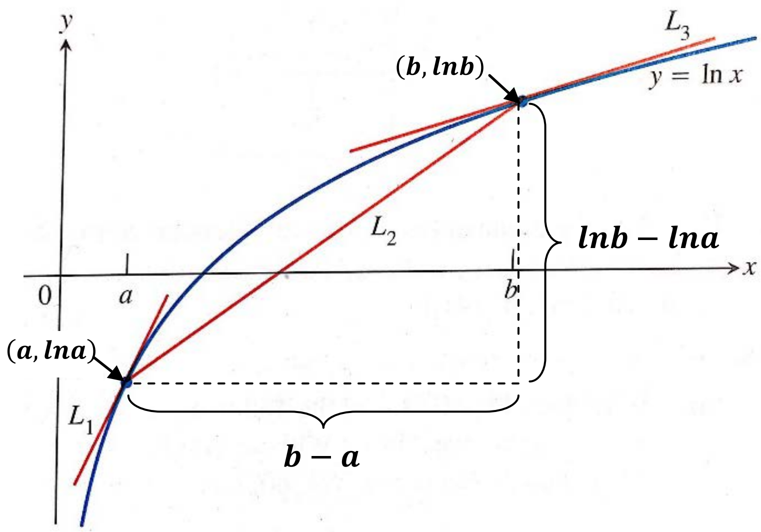
לפניך שתי הוכחות גרפיות לכך ש- $0 < a < b \;\Rightarrow\; \frac{1}{b} < \frac{lnb-lna}{b-a} < \frac{1}{a}$





הסבר את ההוכחה הגרפית בכל אחד מהמקרים. סעיף (a) 10 נק' וסעיף (b) 15 נק'.

<u>הסבר סעיף a</u>



$\frac{1}{a}$ הוא שיפוע המשיק L_1 - ערך הנגזרת של

lnx בנקודה (a, lna).

$\frac{lnb-lna}{b-a}$ הוא שיפוע המיתר L_2 - $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$.

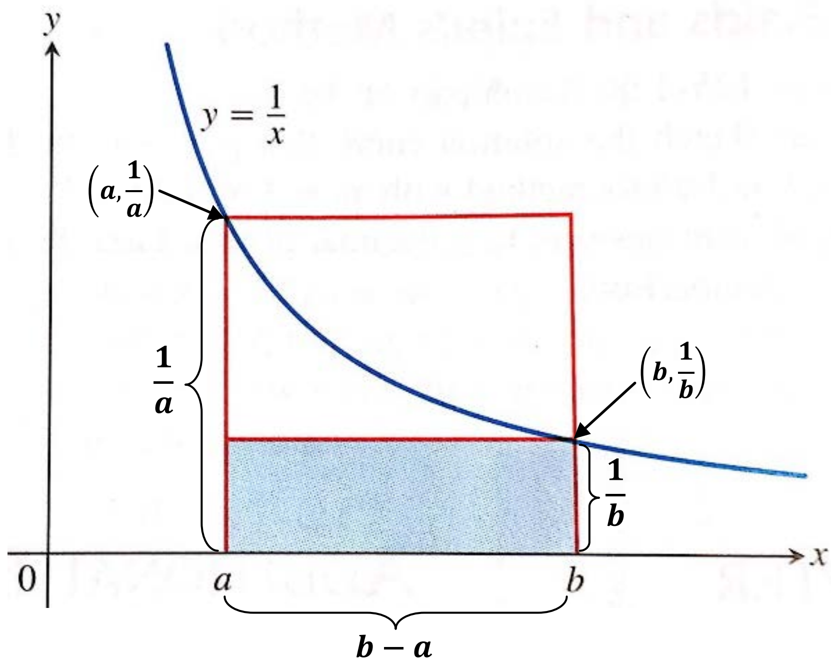
$\frac{1}{b}$ הוא שיפוע המשיק L_3 - ערך הנגזרת של

lnx בנקודה (b, lnb).

באיור רואים ששיפוע L_1 גדול משיפוע L_2,

אשר גדול משיפוע L_3: $\frac{1}{b} < \frac{lnb-lna}{b-a} < \frac{1}{a}$

<u>הסבר סעיף b</u>



את אי השוויון $\frac{1}{b} < \frac{lnb-lna}{b-a} < \frac{1}{a}$ אפשר

לרשום גם כך: $\frac{b-a}{b} < lnb - lna < \frac{b-a}{a}$

$\frac{b-a}{b}$ הוא שטח המלבן הכחול – רוחבו x גובהו.

$lnb - lna$ הוא השטח שבין הגרף לציר x -

האינטגרל של $\frac{1}{x}$ בין a ל-b.

$\frac{b-a}{a}$ הוא שטח המלבן הכולל – רוחבו x גובהו.

באיור ניתן לראות ששטח המלבן הכחול מוכל

בשטח שתחת הגרף, וזה האחרון מוכל בשטח

המלבן הכולל: $\frac{b-a}{b} < lnb - lna < \frac{b-a}{a}$

4. משוואה דיפרנציאלית ניתנת להפרדה

סוציולוגים משתמשים במונח "דיפוזיה סוציאלית" (Social Diffusion) כדי לתאר את האופן שבו מידע מתפשט באוכלוסייה. כאשר האוכלוסייה גדולה, מספר האנשים x שיש להם המידע מתואר כפונקציה דיפרנציאלית (גזירה) בזמן. קצב הדיפוזיה, dx/dt, יחסי למספר האנשים שיש להם המידע כפול מספר האנשים שאין להם המידע. מקדם היחס הוא k. נסמן על ידי N את מספרם של כלל האנשים באוכלוסייה.

נניח ש-t בימים, k=1/250, ושני אנשים מתחילים להפיץ את השמועה באוכלוסייה של 1000 איש.

א. רשום את המשוואה הדיפרנציאלית (5 נק')

ב. מצא את x כתלות ב-t (15 נק')

ג. מתי מחצית האוכלוסייה תשמע אודות השמועה? (5 נק')

<u>פיתרון א' – רישום המשוואה הדיפרנציאלית:</u>

$\boldsymbol{x_{(t)}}$ is the $number\ of\ informed\ peopl$ at any given time, $\boldsymbol{x_{(0)} = 2}$

$\boldsymbol{N = 1000}$ is the $total\ population$ $=>$

$\boldsymbol{N - x_{(t)}}$ is the $number\ of\ non\ informed\ people\ at\ any\ given\ time$

$\boldsymbol{k = 1/250}$ is the $constant\ of\ proportion$

קצב הדיפוזיה יחסי למכפלת מספר האנשים בעלי המידע במספר האנשים חסרי המידע:

$$\frac{dx_{(t)}}{dt} = k \cdot x_{(t)} \cdot (N - x_{(t)})$$

<u>פיתרון ב' – מציאת x כתלות ב-t:</u>

$$\frac{dx_{(t)}}{dt} = k \cdot x_{(t)} \cdot (N - x_{(t)}) \quad => \quad \frac{dx_{(t)}}{x_{(t)} \cdot (N - x_{(t)})} = k \cdot dt \quad => \quad \frac{dx_{(t)}}{x_{(t)} \cdot (x_{(t)} - N)} = -k \cdot dt$$

$$\int_{x_{(0)}}^{x_{(t)}} \frac{1}{x \cdot (x - N)} dx = -k \int_{t_0}^{t} dT$$

נפרק את האינטגרנד שבאגף שמאל לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{x \cdot (x - N)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - N} = \frac{A(x - N) + Bx}{x(x - N)} = \frac{(A + B)x - NA}{x(x - N)} => \begin{cases} A + B = 0 \\ -NA = 1 \end{cases} =>$$

$$=> \begin{cases} B = -A = 1/N \\ A = -1/N \end{cases} => \quad \frac{1}{x \cdot (x - N)} = \frac{-1/N}{x} + \frac{1/N}{x - N} = \frac{1}{N}\left(\frac{1}{x - N} - \frac{1}{x}\right)$$

המשוואה האינטגראלית אליה הגענו קודם יכולה אם כן להיכתב כך:

$$\frac{1}{N} \int_{x_{(0)}}^{x_{(t)}} \left(\frac{1}{x - N} - \frac{1}{x}\right) dx = -k \int_{t_0}^{t} dT$$

כעת האינטגרל שבאגף שמאל פתיר. פיתרון המשוואה בעמוד הבא.

$$\frac{1}{N}\int_{x_{(0)}}^{x_{(t)}}\left(\frac{1}{x-N}-\frac{1}{x}\right)dx = -k\int_{t_0}^{t} dT \quad => \quad \int_{x_{(0)}}^{x_{(t)}}\left(\frac{1}{x-N}-\frac{1}{x}\right)dx = -kN\int_{t_0}^{t} dT \quad =>$$

$$[ln|x-N|-ln|x|\Big|_{x_{(0)}}^{x_{(t)}} = -kN[T\Big|_{t_0}^{t} \quad => \quad ln\left|\frac{x-N}{x}\right|\Big|_{x_{(0)}}^{x_{(t)}} = -kN[T\Big|_{t_0}^{t} \quad =>$$

$$ln\left|\frac{x_{(t)}-N}{x_{(t)}}\right| - ln\left|\frac{x_{(0)}-N}{x_{(0)}}\right| = -kN(t-t_0) \quad => \quad ln\left|\frac{x_{(t)}-N}{x_{(t)}}\cdot\frac{x_{(0)}}{x_{(0)}-N}\right| = -kN(t-t_0) \quad =>$$

$$=> \quad \left|\frac{x_{(t)}-N}{x_{(t)}}\cdot\frac{x_{(0)}}{x_{(0)}-N}\right| = e^{-kN(t-t_0)} \quad => \quad x_{(t)}-N = x_{(t)}\cdot\frac{x_{(0)}-N}{x_{(0)}}e^{-kN(t-t_0)} \quad =>$$

$$=> \quad x_{(t)} - x_{(t)}\cdot\frac{x_{(0)}-N}{x_{(0)}}e^{-kN(t-t_0)} = N \quad => \quad x_{(t)}\left[1-\frac{x_{(0)}-N}{x_{(0)}}e^{-kN(t-t_0)}\right] = N \quad =>$$

$$x_{(t)} = \frac{N}{1-\frac{x_{(0)}-N}{x_{(0)}}e^{-kN(t-t_0)}} = \frac{N}{1+\frac{N-x_{(0)}}{x_{(0)}}e^{-kN(t-t_0)}} = \frac{N}{1+\frac{N-x_{(0)}}{x_{(0)}}e^{-kN\cdot t}}$$

בדיקת היתכנות לפונקציה שקיבלנו:

כאשר $t = 0$ המכנה שווה $N/x_{(0)}$ ואם כך ערך הפונקציה הוא $x_{(0)}$ כפי שאמור להיות.

כאשר $t \to \infty$ המכנה שואף ל- 1 ואם כך ערך הפונקציה שואף ל- N כפי שאמור להיות.

הפונקציה שקיבלנו נכונה כנראה.

<u>פיתרון ג':</u>

כדי לדעת מתי מחצית האוכלוסייה תשמע אודות השמועה, נציב $\frac{N}{2}$ במקום $x_{(t)}$ ונחלץ את t :

$$\frac{N}{2} = \frac{N}{1+\frac{N-x_{(0)}}{x_{(0)}}e^{-kN\cdot t}} \quad => \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{1+\frac{N-x_{(0)}}{x_{(0)}}e^{-kN\cdot t}} \quad => \quad \frac{1}{2} = \frac{x_{(0)}}{x_{(0)}+(N-x_{(0)})e^{-kN\cdot t}} \quad =>$$

$$x_{(0)} + \left(N-x_{(0)}\right)e^{-kN\cdot t} = 2x_{(0)} \quad => \quad \left(N-x_{(0)}\right)e^{-kN\cdot t} = x_{(0)} \quad => \quad e^{-kN\cdot t} = \frac{x_{(0)}}{N-x_{(0)}} \quad =>$$

$$=> \quad ln e^{-kN\cdot t} = ln\frac{x_{(0)}}{N-x_{(0)}} \quad => \quad -kN\cdot t = ln\frac{x_{(0)}}{N-x_{(0)}} \quad => \quad t = -\frac{1}{kN}ln\frac{x_{(0)}}{N-x_{(0)}} \quad =>$$

$$t = \frac{1}{kN}ln\frac{N-x_{(0)}}{x_{(0)}} = \frac{1}{4}ln\frac{1000-2}{2} = \frac{1}{4}ln\frac{998}{2} \approx 1.53\ days$$

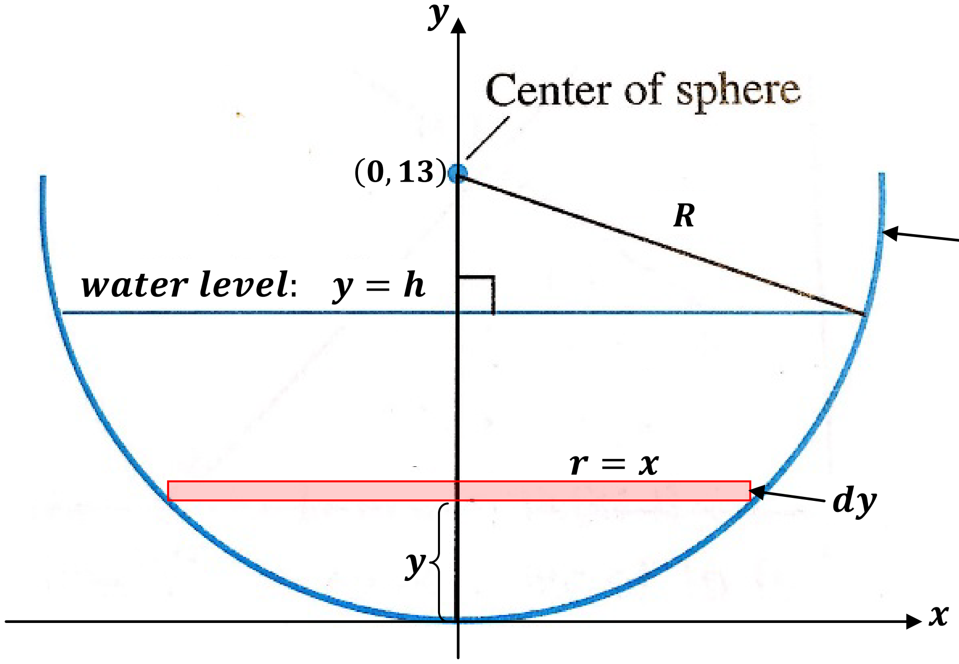
5. שימושי הנגזרת ושימושי האינטגרל

נתון מיכל כדורי שרדיוסו R=13 מטרים. עומק המים במיכל הוא h מטרים.

א. שרטט מערכת צירים קרטזית כך שמרכז המעגל יהיה בנקודה (0,R).

השתמש בשיטת הדסקות כדי לחשב את נפח המים במיכל כתלות ב- h . (15 נק').

<u>פיתרון א':</u>



$$x^2 + (y-R)^2 = R^2$$

$$x^2 = R^2 - (y-R)^2$$

$$x^2 = -(y^2 - 2R\cdot y)$$

$$dV = \pi r^2 dy = \pi x^2 dy = -\pi(y^2 - 2R\cdot y)dy$$

$$V_{(h)} = -\pi\int_0^h (y^2 - 2R\cdot y)dy = -\pi\left[\frac{y^3}{3} - Ry^2\right|_0^h = -\pi\left(\frac{h^3}{3} - Rh^2\right) = \pi\left(Rh^2 - \frac{h^3}{3}\right)\ [m^3]$$

$$V_{(h)} = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)\ [m^3]$$

ב. המים בורחים מהמיכל בקצב של 6 מטרים מעוקבים לדקה.

מהו קצב השינוי של עומק המים במיכל כאשר עומקם הוא 8 מטרים? (10 נק').

<u>פיתרון ב':</u>

$$Given:\ \frac{dV}{dt} = -6\,m^3/min \qquad \left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=8m} = ?$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{dV}\cdot\frac{dV}{dt} = \frac{dh}{dV}\cdot(-6)$$

$$V_{(h)} = \pi\left(Rh^2 - \frac{h^3}{3}\right) \quad => \quad \frac{dV}{dh} = \pi(2Rh - h^2) = \pi h(2R-h) \quad => \quad \frac{dh}{dV} = \frac{1}{\pi h(2R-h)}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{dV}\cdot\frac{dV}{dt} = \frac{1}{\pi h(2R-h)}\cdot(-6) \quad => \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{6}{\pi h(2R-h)}$$

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=8} = -\frac{6}{8\pi(2\cdot 13 - 8)} = -\frac{1}{24\pi}\ [m/min]$$

קצב שינוי עומק המים שהתקבל הינו שלילי, ז"א עומק המים פוחת, כצפוי, בשל בריחת המים מהמיכל.