1. רציפות וגזירות

נתון $y(x) = |x|(2x - cosx + 1)$.

א. השתמש במשפט: "אם $f_1(x)$ רציפה ו- $f_2(x)$ רציפה גם כן ובאותו התחום, אז מכפלתם רציפה בתחום" כדי להוכיח כי $y(x)$ רציפה לכול x (5 נקו')

ב. מהי הנגזרת של $y(x)$ עבור $x \neq 0$? (10 נקו')

ג. האם $y(x)$ גזירה בנקודה $x = 0$? אם כן מה ערכה? (10 נקו')

פיתרון:

א. כאן $f_{1(x)} = |x|$ ואילו $f_{2(x)} = 2x - cosx + 1$. כ"א מהן רציפה לכל x , ולכן גם מכפלתם, $y_{(x)}$, רציפה לכל x.

ב. עבור $x < 0$ אין לערך המוחלט משמעות. עבור $0 < x$ יש לערך המוחלט משמעות (לא נשאלנו על $x = 0$):

$$f_{(x)} = \begin{cases} x(2x - cosx + 1) & , \quad 0 < x \\ -x(2x - cosx + 1) & , \quad x < 0 \end{cases}$$

$$f'_{(x)} = \begin{cases} 4x + x \cdot sinx - cosx + 1 & , \quad 0 < x \\ -(4x + x \cdot sinx - cosx + 1) & , \quad x < 0 \end{cases}$$

ג. $y_{(x)}$ רציפה ב- $x = 0$ כך שיש טעם לבדוק את גזירותה בנקודה זו. נתקרב ל- $x = 0$ פעם משמאל ופעם מימין ונבדוק אם מתקבל <u>שיפוע</u> זהה. אם כך הוא, אזי $y_{(x)}$ גזירה ב- $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0^-} f'_{(x)} = -\lim_{x \to 0^-} (4x + x \cdot sinx - cosx + 1) = -(0 + 0 - 1 + 1) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'_{(x)} = \lim_{x \to 0^+} (4x + x \cdot sinx - cosx + 1) = (0 + 0 - 1 + 1) = 0$$

כשמתקרבים משני הצדדים ל- $x = 0$ מתקבל אותו השיפוע (0) , ואם כך $y_{(x)}$ גזירה בנקודה $(0, 0)$.

2. גבול, רציפות, המשפט היסודי

א. האם הפונקציה $f(x) = \frac{arctanx - x + (x^3/3)}{x^5}$ רציפה בנקודה $x = 0$? (5 נקו')

מהו הגבול $\lim_{x\to 0} \frac{arctanx - x + (x^3/3)}{x^5}$? (5 נקו')

ב. הנח כי F(x) היא האנטי נגזרת של $f(x) = \sqrt{1+x^4}$.

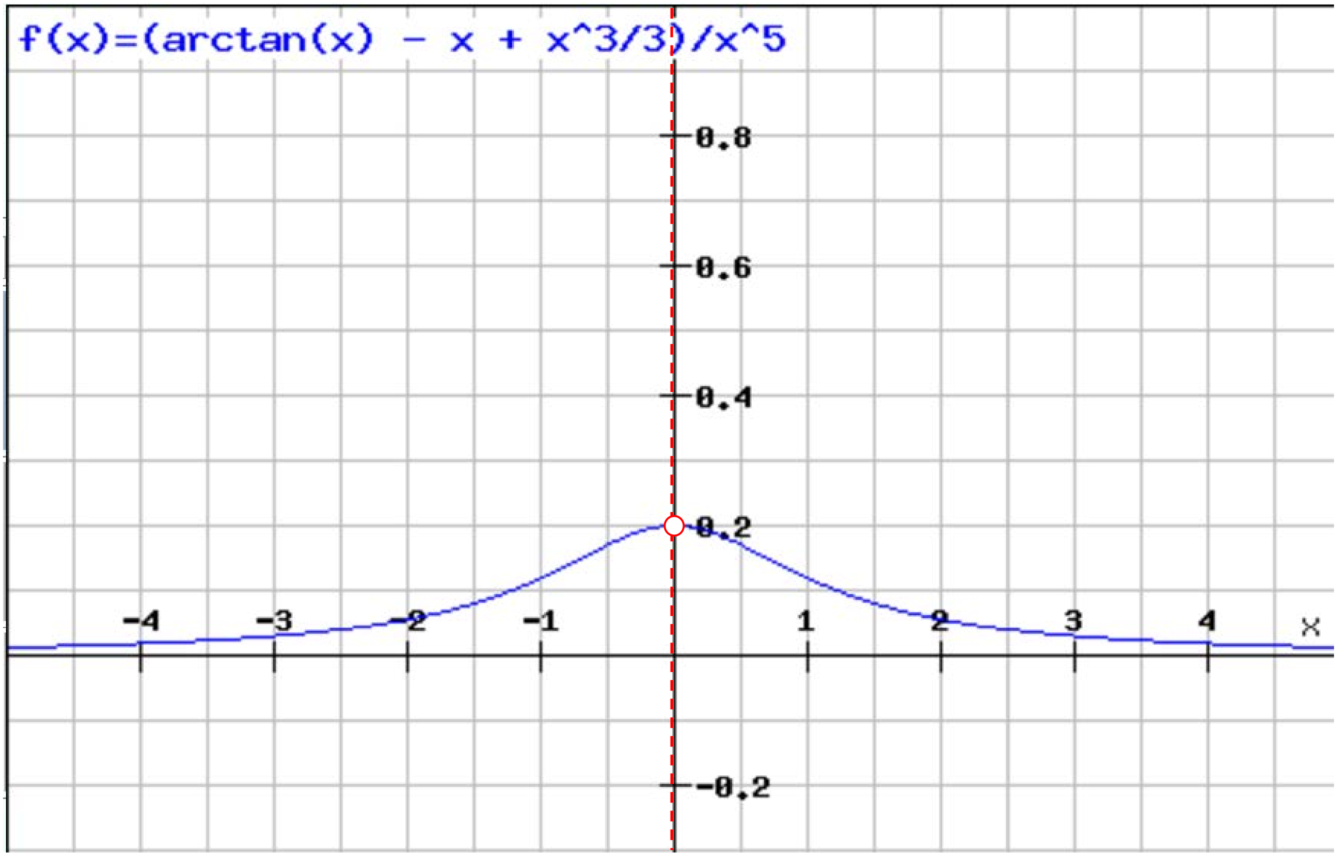
בטא את $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx$ במונחים של F. הסבר (15 נקו')

פיתרון:

א. ברור שלא, כי היא אינה מוגדרת ב- $x = 0$, והיכן שפונקציה אינה מוגדרת היא אינה רציפה.

$$\lim_{x\to 0} \frac{arctanx - x + (x^3/3)}{x^5} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x^2+1} - 1 + x^2}{5x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + (x^2-1)(x^2+1)}{5x^4(x^2+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + x^4 - 1}{5x^4(x^2+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{5x^4(x^2+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{5(x^2+1)} = \frac{1}{5}$$



ב.

$$F_{(x)} = \int f(x)dx = \int \sqrt{1+x^4}\,dx \quad => \quad \int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx = F_{(1)} - F_{(0)}$$

על פי משפט ניוטון לייבניץ.

3. שימושי הנגזרת – הבנה של הגדרת הנגזרת

סולם שאורכו 13 רגל נשען על קיר. לפתע הוא מחליק כמתואר בציור. כאשר בסיס הסולם מרוחק מהקיר 12 רגל, הבסיס נע ימינה בקצב של 5 רגל לשנייה. מהו קצב השינוי של השטח המוגבל ע"י הסולם, הקיר והקרקע, **סביב רגע זה** ?

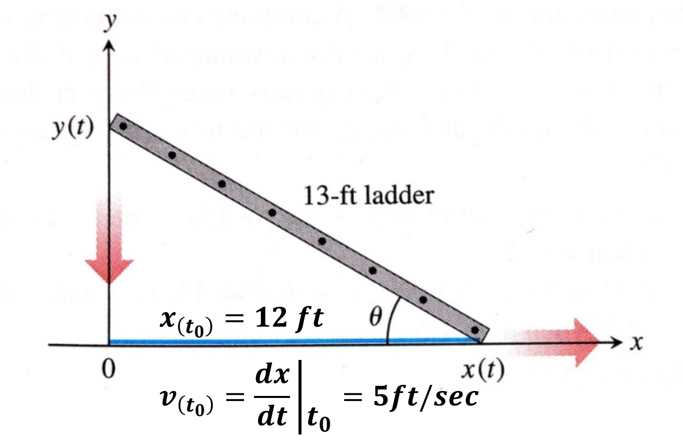
עליך לענות על שאלה זו תוך שימוש **בהגדרת הנגזרת** של פונקצית השטח A(t).

הדגש בתשובתך מיהו השטח ה"ישן" ומיהו השטח ה"חדש" (בין שתי הנקודות שאותן עליך לתאר).

קח בחשבון תזוזה של בסיס הסולם בשיעור של עשירית האחוז, $\frac{\Delta x}{x} = 1/1000$ (15 נקו').

כעת חשב שוב, הפעם בעזרת כלל השרשרת (5 נקו'). מניין ההבדל ? (5 נקו')

פיתרון:



$$A_{(x,y)} = \frac{1}{2}xy \quad , \quad y_{(x)} = \sqrt{169 - x^2} \quad =>$$

$$A_{(x)} = \frac{1}{2}x\sqrt{169 - x^2} \quad , \quad X_{old} = 12\ ft \quad =>$$

$$A_{old} = A_{(X=12)} = \frac{1}{2} \cdot 12\sqrt{169 - 12^2} = 30\ ft^2$$

$$\Delta x = 0.1\% \cdot X_{old} = 0.001 \cdot 12 = 0.012\ ft$$

$$X_{new} = X_{old} + \Delta x = 12.012\ ft$$

$$A_{new} = A_{(X=12.012)} = \frac{1}{2} \cdot 12.012\sqrt{169 - 12.012^2} = 29.85644\ ft^2$$

כעת יש לחשב את Δt - אינטרוול (מרווח) הזמן שבו החליק בסיס הסולם $\Delta x = 0.012\ ft$ ימינה.

אנו יודעים כי $\Delta x = \overline{v} \cdot \Delta t$, כאשר $\overline{v}$ היא המהירות **הממוצעת** לרוחב האינטרוול Δt .

איננו יודעים מהי $\overline{v}$, אז נציב $v_{(t_0)}$ במקומה, ז"א נציב את המהירות שבתחילת האינטרוול במקום את זו הממוצעת לרוחבו.

ככל שיקטן האינטרוול Δt , תהיה המהירות שבתחילת האינטרוול דומה יותר לזו הממוצעת לרוחבו ונשיג דיוק רב יותר.

$$\Delta x \approx v_{(x=12)} \cdot \Delta t \quad => \quad 0.012 \approx 5 \cdot \Delta t \quad => \quad \Delta t \approx 2.4 \cdot 10^{-3} = 2.4\ mS$$

לאורך פרק זמן של $2.4\ mS$ אשר תחילתו ב- t_0 (הרגע המתואר באיור), קצב השינוי **הממוצע** של השטח תחת הסולם הינו :

$$\frac{dA}{dt} \approx \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{A_{new} - A_{old}}{\Delta t} = \frac{29.85644 - 30}{2.4 \cdot 10^{-3}} = -59.817\ [ft^2/sec]$$

כעת לחישוב בעזרת כלל השרשרת : $\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$

$$A_{(x)} = \frac{1}{2}x\sqrt{169 - x^2}$$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{169 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{169 - x^2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{169 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{169 - x^2}}\right) = \frac{169 - 2x^2}{2\sqrt{169 - x^2}}$$

$$\left.\frac{dA}{dx}\right|_{x = 12\ ft} = \frac{169 - 2 \cdot 12^2}{2\sqrt{169 - 12^2}} = \frac{169 - 288}{2\sqrt{25}} = -\frac{119}{10} = -11.9\ [ft^2/ft]$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x = 12\ ft} = 5\ [ft/sec]$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{x = 12\ ft} = \left.\frac{dA}{dx}\right|_{x = 12\ ft} \cdot \left.\frac{dx}{dt}\right|_{x = 12\ ft} = -11.9 \cdot 5 = -59.5\ [ft^2/sec]$$

נוסחאות הגזירה מניבות את קצב שינוי השטח בנקודה. בנקודה לא קורה דבר, חייב לחלוף זמן כלשהו כדי שהשטח ישתנה.

4. זהות היפרבולית + חקירה מיידית של פונקציה

א. הוכח כי $\boldsymbol{sinh(x+y) = sinhxcoshy + coshxsinhy}$ (10 נקו')

ב. צייר באופן מיידי את $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^4+1}{x^2}}$ וציין על הגרף נקודות קיצון והאסימפטוטות המתאימות (15 נקו')

פיתרון :

א.

$$\boldsymbol{sinhx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad , \quad coshx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$

$$\boldsymbol{L.H.S: \ sinh(x+y) = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2}}$$

$$\boldsymbol{R.H.S: \ sinhxcoshy + coshxsinhy = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} =}$$

$$\boldsymbol{= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{y-x} - e^{-(x+y)}}{4} + \frac{e^{x+y} - e^{x-y} + e^{y-x} - e^{-(x+y)}}{4} = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = L.H.S}$$

ב.

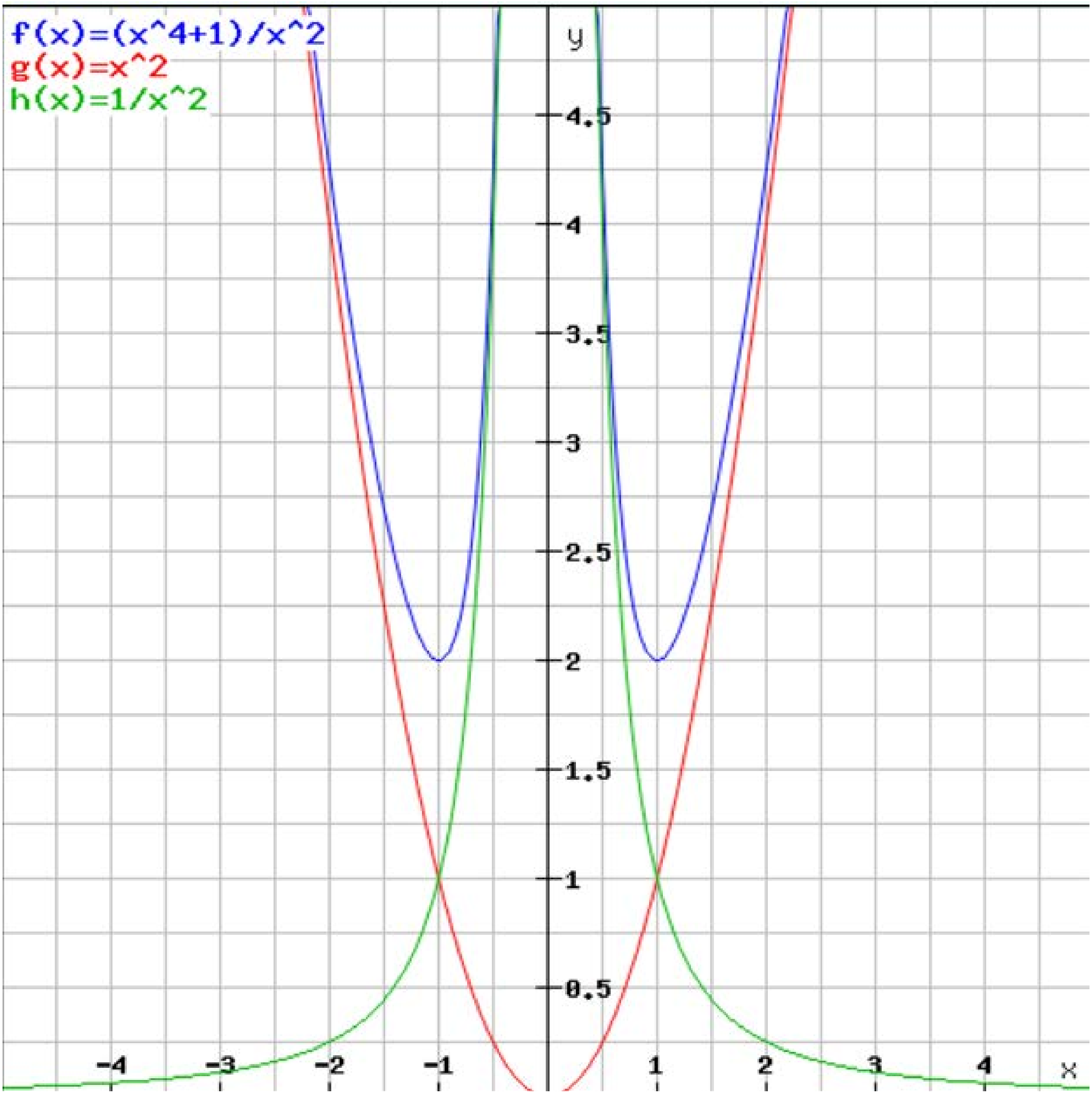
הפונקציה זוגית, לכן נצייר רק את החצי הימני ולבסוף נשקף על ציר $\boldsymbol{Y}$.

$$f(x)=\frac{x^4+1}{x^2} = x^2+\frac{1}{x^2}$$

$$for\ small\ values\ of\ x\ , \qquad f(x)\approx\frac{1}{x^2} \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty \quad => \quad x=0\ vertical\ asymptote$$

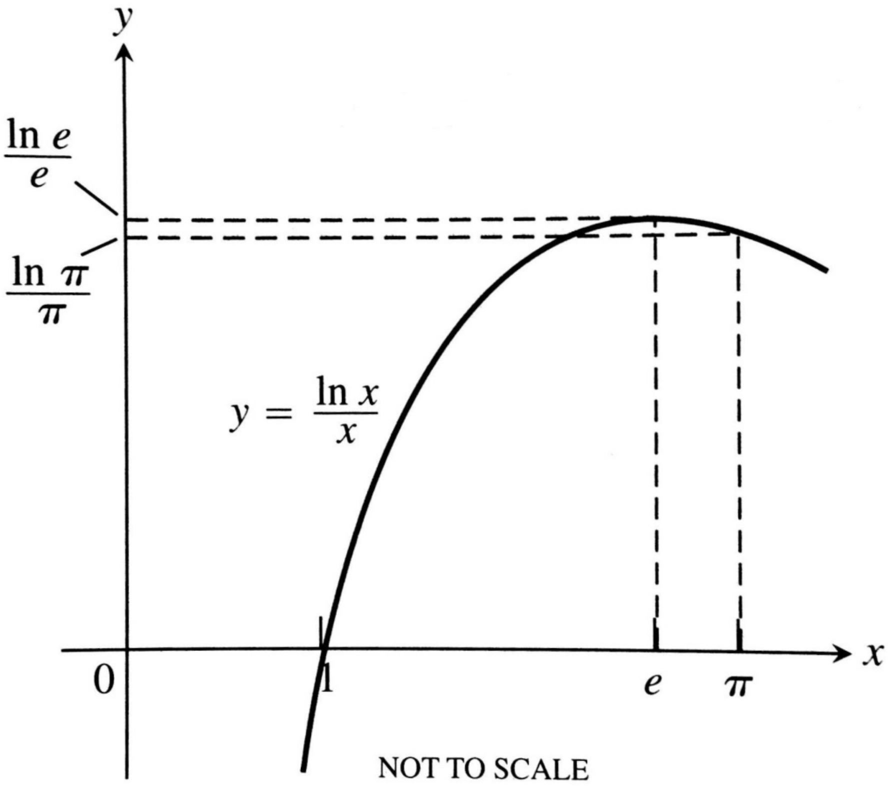
$$for\ large\ values\ of\ x\ , \qquad f(x)\approx x^2 \quad , \quad x^2\ parabolic\ asymptote\ as\ x\to\infty$$

היכן ש- $x^2 = \frac{1}{x^2}$ מתרחשת "החלפת דומיננטיות" בין שני האיברים המרכיבים את הפונקציה, ומתקבלת נקודת מינימום $(1,2)$.



5. ניתוח גרף הפונקציה להוכחת אי שוויון אלגברי וכן שימושי האינטגרל לחישוב שטח ונפח

התבונן בגרף הפונקציה שבציור,



א. הוכח, בעזרת הגרף, כי $\pi^e < e^\pi$ (7 נקו')

ב. חשב את השטח הכלוא תחת הפונקציה בתחום $[1,e]$ (5 נקו')

ג. חשב את נפח הגוף הנוצר על ידי סיבוב השטח הכלוא מסעיף ב' סביב ציר ה-x (13 נקו')

פיתרון :

א. מהגרף עולה כי

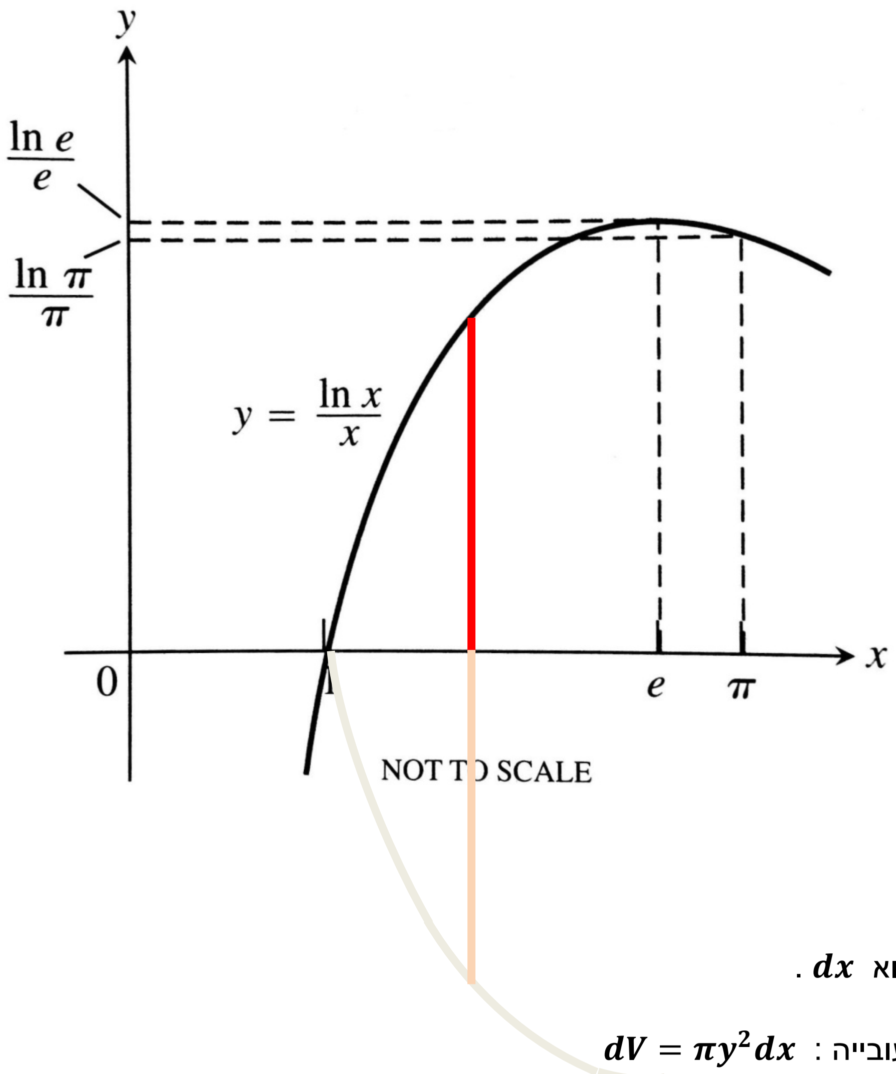
$$\frac{\ln\pi}{\pi} < \frac{\ln e}{e} \quad => \quad e\ln\pi < \pi\ln e \quad => \quad \ln\pi^e < \ln e^\pi \quad => \quad \pi^e < e^\pi$$

ב.

$$S = \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx \quad => \quad \begin{cases} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \end{cases} \quad => \quad x = 1 \rightarrow u = 0 \quad , \quad x = e \rightarrow u = 1$$

$$\int_0^1 u\,du = \frac{u^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1^2 - 0^2}{2} = \frac{1}{2} \ square\ units$$

ג.



בשיטת הדיסקות:

שטחה של דיסקה הינו πy^2 ועובייה הוא dx .

נפחה של דיסקה הינו מכפלת שטחה בעובייה : $dV = \pi y^2 dx$

אינטגרציה של אינסוף דיסקות כאלה בתחום $[1, e]$ תניב את הנפח המבוקש :

$$\int_1^e \pi y^2 dx = \pi \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2} dx \quad \rightarrow \quad \begin{cases} u = \ln^2 x \quad => \quad du = \frac{2\ln x}{x} dx \\ dv = \frac{dx}{x^2} \quad => \quad v = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx = -\frac{\ln^2 x}{x} + \int \frac{1}{x} \cdot \frac{2\ln x}{x} dx = -\frac{\ln^2 x}{x} + 2\int \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$\int \frac{lnx}{x^2}dx \quad \rightarrow \quad \begin{cases} u = lnx \quad => \quad du = \frac{1}{x}dx \\ dv = \frac{dx}{x^2} \quad => \quad v = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\int u \cdot dv \quad = \quad u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\int \frac{lnx}{x^2}dx = -\frac{lnx}{x} + \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}dx = -\frac{lnx}{x} + \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{lnx}{x} - \frac{1}{x}$$

סיכום:

$$\int \frac{ln^2x}{x^2}dx = -\frac{ln^2x}{x} + 2\int \frac{lnx}{x^2}dx = -\frac{ln^2x}{x} + 2\left(-\frac{lnx}{x} - \frac{1}{x}\right) =$$

$$= -\frac{ln^2x + 2lnx + 2}{x}$$

ולכן:

$$\pi \int_1^e \frac{ln^2x}{x^2}dx = -\pi \frac{ln^2x + 2lnx + 2}{x}\Big|_1^e = -\pi\left(\frac{ln^2e + 2lne + 2}{e} - \frac{ln^21 + 2ln1 + 2}{1}\right) =$$

$$-\pi\left(\frac{1+2+2}{e} - \frac{0+0+2}{1}\right) = -\pi\left(\frac{5}{e} - 2\right) = \pi\left(2 - \frac{5}{e}\right) \approx 0.5045\ Cubic\ Units$$