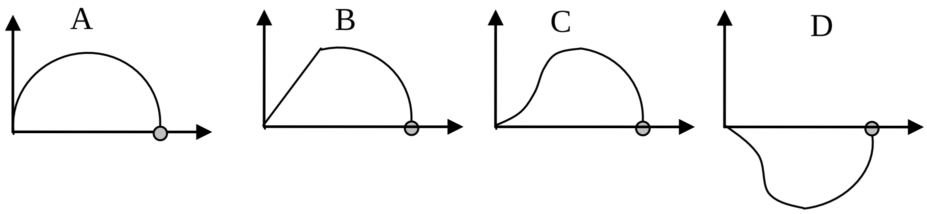
1. גזירות, תיאור גרפי של פונקציה ושימושי האינטגרל

נתון $y_{(x)} = |x|sinx$.

א. האם הפונקציה $y_{(x)}$ גזירה בנקודה $x = 0$? נמק (5 נקו')

ב. האם לפונקציה יש מקסימום, מינימום או פיתול ב- $x = 0$? הסבר (5 נקו')

ג. מי מבין הגרפים הבאים מתאר את $y_{(x)}$ בתחום $[0, \pi]$? הסבר (5 נקו')



ד. סובב סביב ציר ה- x את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר זה בקטע $[0, \pi]$, וחשב את נפח הגוף. (10 נקו')

פיתרון א' :

נחלק את הפונקציה לשני תחומים, $0 \le x$ שם לערך המוחלט אין משמעות ו- $x < 0$ שם לערך המוחלט יש משמעות.

כעת נבדוק אם הפונקציה רציפה ב- $x = 0$. אם היא אינה רציפה שם היא גם אינה גזירה שם, וזה סוף הסיפור.

$x < 0$	$0 \le x$
$y_{(x)} = -x \cdot sinx$	$y_{(x)} = x \cdot sinx$
$\lim\limits_{x \to 0^-} y_{(x)} = 0$	$\lim\limits_{x \to 0^+} y_{(x)} = y_{(0)} = 0$

$$\lim_{x \to 0^-} y_{(x)} = y_{(0)} = \lim_{x \to 0^+} y_{(x)} \quad => \quad continuous\ at\ \ x = 0$$

רציפה ב- $x = 0$, אז נגזור ונשאיף את x לאפס. אם יתקבל אותו השיפוע משמאל ומימין אז הפונקציה גזירה ב- $x = 0$.

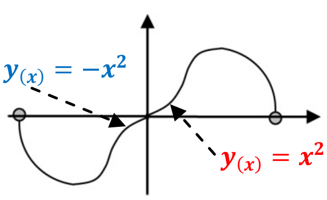
$x < 0$	$0 \le x$
$y_{(x)} = -x \cdot sinx$	$y_{(x)} = x \cdot sinx$
$y'_{(x)} = -(sin\,x\ +\ x \cdot cosx)$	$y'_{(x)} = sin\,x\ +\ x \cdot cosx$
$\lim\limits_{x \to 0^-} y'_{(x)} = 0$	$\lim\limits_{x \to 0^+} y'_{(x)} = 0$

$$\lim_{x \to 0^-} y'_{(x)} = \lim_{x \to 0^+} y'_{(x)} \quad => \quad differentiable\ at\ \ x = 0$$

פיתרון ב' :

עבור ערכים קטנים של x , ז"א כאשר $x \to 0$, מתקיים הקירוב $sinx \approx x$ (יכולנו להשתמש בכך גם בסעיף הקודם).

אי לכך, עבור ערכים קטנים של x , אפשר לרשום את הפונקציה כך: $y_{(x)} \approx |x| \cdot x$.

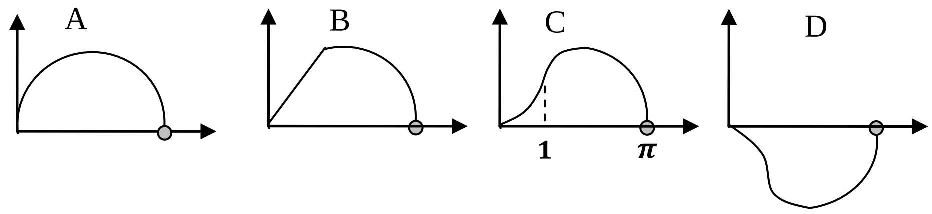


עבור $0 \le x$, מתקבל $y_{(x)} \approx x^2$ (פרבולה "מחייכת" שקודקודה בראשית).

עבור $x < 0$ מתקבל $y_{(x)} \approx -x^2$ (פרבולה "בוכה" שקודקודה בראשית).

אם כך, לפונקציה יש פיתול ב- $x = 0$ (מעבר מקמירות לקעירות).

פיתרון ג' :

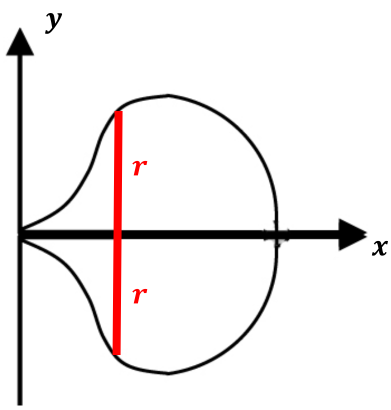


הגרף המתאר את $y_{(x)} = |x|sinx$ בתחום $[0,\pi]$ הוא גרף **C** .

כאשר $1<x<\pi$, $y = sinx$ עובר מתיחה אנכית. כאשר $0<x<1$, $y = sinx$ עובר כיווץ אנכי.

בשילוב המסקנה מסעיף ב' כי בקרבת ציר **Y** ישנה קעירות, אנו נותרים עם גרף C כאפשרות היחידה שבאה בחשבון.

פיתרון ד' :



בשיטת הדיסקות, נפחה של כל דיסקה הוא $dV = \pi r^2 dx = \pi x^2 sin^2 x \cdot dx$

$$\pi\int_0^\pi x^2 sin^2 x\cdot dx \;=\; \frac{\pi}{2}\int_0^\pi x^2(1-cos\,2x)\cdot dx \;=\; \frac{\pi}{2}\int_0^\pi (x^2 - x^2cos\,2x)\cdot dx$$

$$\int x^2\,dx \;=\; \frac{1}{3}x^3$$

$$\int u\cdot dv \;=\; u\cdot v - \int v\cdot du$$

$$\int x^2\cdot cos\,2x\cdot dx \;\rightarrow\; \begin{cases} u = x^2 & \Rightarrow \quad du = 2xdx \\ dv = cos\,2x\cdot dx & \Rightarrow \quad v = \frac{1}{2}sin\,2x \end{cases}$$

$$\int x^2\cdot cos\,2x\cdot dx \;=\; \frac{1}{2}x^2 sin\,2x - \int x\,sin\,2x\cdot dx$$

$$\int x sin\,2x\cdot dx \;\rightarrow\; \begin{cases} u = x & \Rightarrow \quad du = dx \\ dv = sin\,2x\cdot dx & \Rightarrow \quad v = -\frac{1}{2}cos\,2x \end{cases}$$

$$\int x sin\,2x\cdot dx \;=\; -\frac{1}{2}x\,cos\,2x + \frac{1}{2}\int cos\,2x\cdot dx$$

$$\int x sin\,2x\cdot dx \;=\; -\frac{1}{2}x\,cos\,2x + \frac{1}{4}sin\,2x$$

$$\int x^2\cdot cos\,2x\cdot dx \;=\; \frac{1}{2}x^2 sin\,2x + \frac{1}{2}x\,cos\,2x - \frac{1}{4}sin\,2x$$

$$\frac{\pi}{2}\int_0^\pi (x^2 - x^2cos\,2x)\cdot dx \;=\; \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 sin\,2x - \frac{1}{2}x\,cos\,2x + \frac{1}{4}sin\,2x\right|_0^\pi \;=$$

$$\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{3}\pi^3 - \frac{1}{2}\pi^2 sin\,2\pi - \frac{1}{2}\pi\,cos\,2\pi + \frac{1}{4}sin\,2\pi - (0)\right] \;=\; \frac{\pi}{2}\left[\frac{\pi^3}{3} - \frac{\pi}{2}\right] \;=\; \frac{\pi^2(2\pi^2-3)}{12}\ \textit{Cubic Units}$$

2. חקירת פונקציה

נגדיר $f_{(x)} = x^4 - 4|x|$

חקור את הפונקציה לפי הפירוט הבא: תחום הגדרה וזוגיות (4 נקו'), תחומי עליה וירידה (2 נקו'), תחומי קמירות וקעירות (2 נקו'), נקודות פיתול (2 נקו'), נקודות קיצון (2 נקו'), שרטוט גרף הפונקציה (7 נקו'), ערך הנגזרת בנקודה $x = 0$ (6 נקו')

פיתרון :

תחום הגדרה : כל x .

זוגיות : זוגית כי $f_{(-x)} = f_{(x)}$. נחקור לכן את $f_{(x)} = x^4 - 4x$ עבור $0 \le x$ ונשקף שמאלה לגבי ציר Y.

חיתוך צירים : $(\sqrt[3]{4}\,, 0)$ $(0\,, 0)$ $(-\sqrt[3]{4}\,, 0)$

ת"ע : $1 < x$ או $-1 < x < 0$ $f'_{(x)} = 4x^3 - 4 > 0$ *accending* $=> x^3 - 1 > 0 => x - 1 > 0 => x > 1$

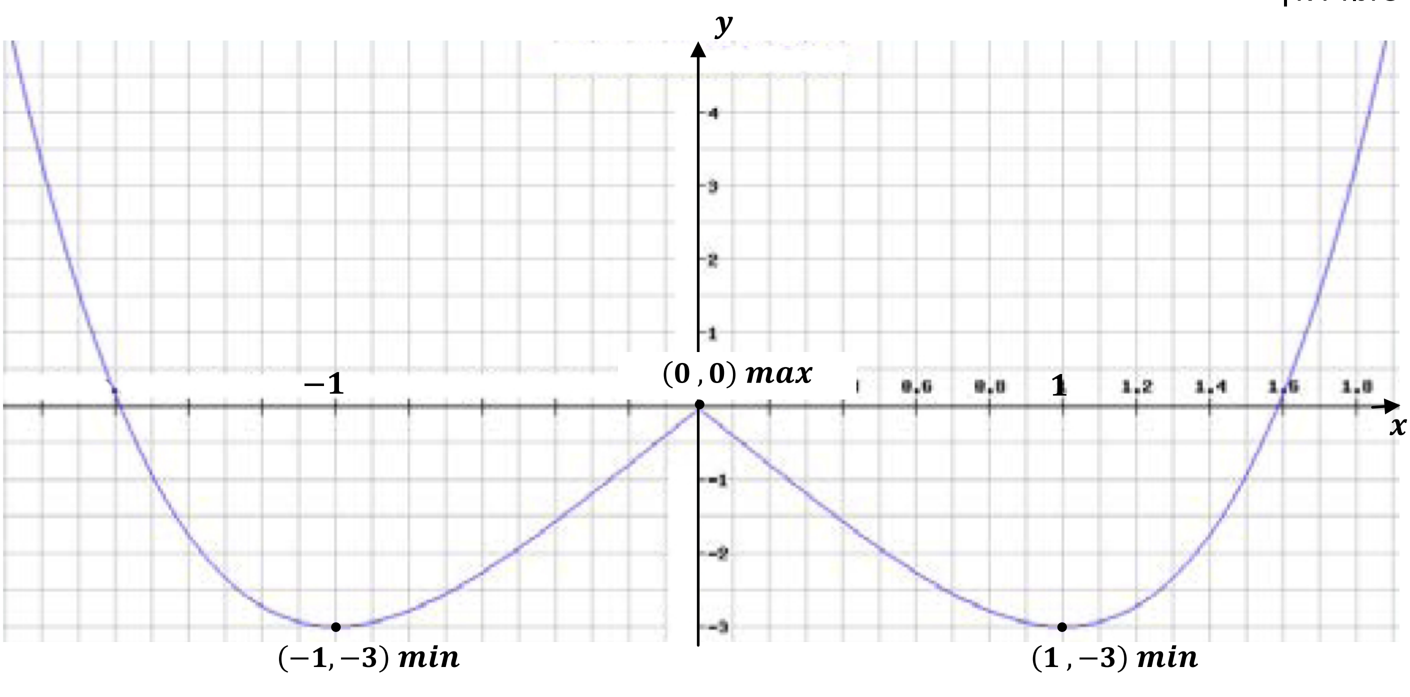
ת"י : $0 < x < 1$ או $x < -1$

קיצון: $(1, -3)$ **מינימום** $(0, 0)$ **מקסימום** $(-1, -3)$ **מינימום**

ת. קעירות: $x \neq 0$ $f''_{(x)} = 12x^2 > 0$ *concave* $=> x^2 > 0 => x \neq 0$

ת. קמירות : אין

פיתול : אין



הפונקציה אינה גזירה ב- $x = 0$ כי ישנו "שפיץ" בנקודה $(0, 0)$. רשמית : $\lim_{x\to0^-} f'_{(x)} = 4 \neq \lim_{x\to0^+} f'_{(x)} = -4$

3. צורתו של חלון היא מלבן וחצי עיגול מעליו, כמתואר בציור. **היקפו של החלון קבוע.**
א) מה צריך להיות היחס בין רוחבו של המלבן לגובהו, כדי שדרך החלון תעבור כמות מרבית של אור?

פיתרון:

היקפו הקבוע של החלון הינו $P = 2x + 2y + \pi x$ <= $y_{(x)} = \frac{P-(\pi+2)x}{2}$

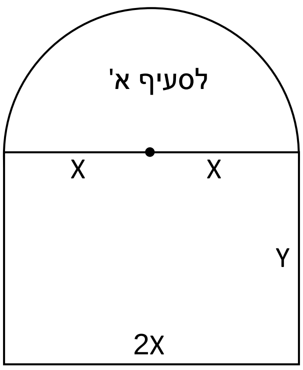
שטח החלון הינו $A_{(x)} = A_{(x)rectangle} + A_{(x)half\ circle} = 2x \cdot \frac{P-(\pi+2)x}{2} + \frac{\pi x^2}{2} = -\left(\frac{\pi+4}{2}\right)x^2 + Px \rightarrow max$

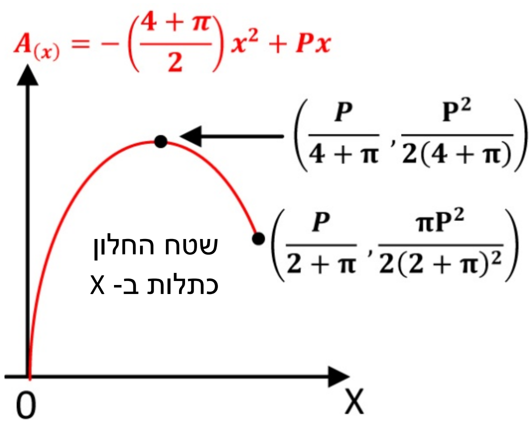
התקבלה פרבולה "בוכה" כך שאכן מדובר במקסימום. על פי הנוסחה לקודקוד פרבולה נקבל $x_k = \frac{-b}{2a} = \frac{-P}{-(\pi+4)} = \frac{P}{\pi+4}$

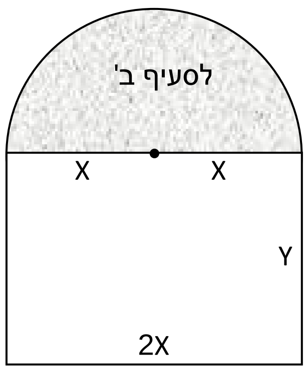
$$y_{(x_k)} = \frac{P-(\pi+2)x_k}{2} = \frac{P-(\pi+2)\frac{P}{\pi+4}}{2} = \frac{P}{\pi+4}$$

כדי שדרך החלון תעבור כמות מרבית של אור, על רוחב המלבן להיות $2x_k = \frac{2P}{\pi+4}$ ועל גובהו להיות $y_{(x_k)} = \frac{P}{\pi+4}$.

היחס בין רוחבו של המלבן לגובהו צריך להיות אם כך $2 = \frac{2x_k}{y_{(x_k)}} = \frac{2P}{\pi+4} \cdot \frac{\pi+4}{P}$.







ב) כעת החליפו את הזכוכית השקופה **שבחצי העיגול** לזכוכית כהה, אשר מפחיתה ב- 50% את כמות האור העובר דרכה.
מה צריך **הפעם** להיות היחס בין רוחבו של המלבן לגובהו, כדי שדרך החלון תעבור כמות מרבית של אור ?

פיתרון:

השטח **האפקטיבי** של החלון הינו $A_{ef(x)} = 2x\frac{P-(2+\pi)x}{2} + \frac{\pi x^2}{4} = -\frac{3\pi+8}{4}x^2 + Px \rightarrow max$

שוב התקבלה פרבולה "בוכה" כך שאכן מדובר במקסימום. על פי הנוסחה לקודקוד פרבולה נקבל $x_k = \frac{-b}{2a} = \frac{-P}{-\frac{3\pi+8}{2}} = \frac{2P}{3\pi+8}$

$$y_{(x_k)} = \frac{P-(\pi+2)x_k}{2} = \frac{P-(\pi+2)\frac{2P}{3\pi+8}}{2} = \frac{(\pi+4)P}{2(3\pi+8)}$$

כדי שדרך החלון תעבור כמות מרבית של אור, על רוחב המלבן להיות $2x_k = \frac{4P}{3\pi+8}$ ועל גובהו להיות $y_{(x_k)} = \frac{(\pi+4)P}{2(3\pi+8)}$.

היחס בין רוחבו של המלבן לגובהו צריך להיות הפעם $1.12 \approx \frac{8}{\pi+4} = \frac{2x_k}{y_{(x_k)}} = \frac{4P}{3\pi+8} \cdot \frac{2(3\pi+8)}{(\pi+4)P}$.

4. לפונקציה f יש נגזרת שלילית לכל x וכן $f_{(1)}=0$.

מי מהטענות הבאות נכונה עבור הפונקציה $h_{(x)}=\int_0^x f_{(t)}dt$? הסבר כל טענה.

א. $h_{(x)}$ גזירה פעמיים.

ב. $h_{(x)}$ וגם $\frac{dh}{dx}$ הן פונקציות רציפות.

ג. לגרף של $h_{(x)}$ יש משיק אופקי ב- $x=1$.

ד. לגרף של $h_{(x)}$ יש מקסימום מקומי ב- $x=1$.

ה. לגרף של $h_{(x)}$ יש מינימום מקומי ב- $x=1$.

ו. לגרף של $h_{(x)}$ יש נקודת פיתול ב- $x=1$.

ז. הגרף של $\frac{dh}{dx}$ חותך את ציר X ב- $x=1$.

פיתרון:

המשפט היסודי של קלקולוס חלק 1

אם f רציפה על $[a,b]$ אז $F_{(x)}=\int_a^x f_{(t)}dt$ רציפה על $[a,b]$ וגזירה על $[a,b]$ ונגזרתה היא $f_{(x)}$:

$$F'_{(x)}=\frac{d}{dx}\int_a^x f_{(t)}dt=f_{(x)}$$

$$h_{(x)}=\int_0^x f_{(t)}dt \quad => \quad \frac{d}{dx}\left[h_{(x)}\right]=\frac{d}{dx}\int_a^x f_{(t)}dt=f_{(x)} \quad => \quad h'_{(x)}=f_{(x)} \quad => \quad h''_{(x)}=f'_{(x)}$$

נאמר בנתונים ש- $f'_{(x)}<0$ לכל x , אז בעצם נאמר ש- $h''_{(x)}<0$ לכל x , ז"א $h_{(x)}$ קמורה לכל x .

בנתונים נאמר גם ש- $f_{(1)}=0$, ז"א $h'_{(1)}=0$, ז"א השיפוע של $h_{(x)}$ מתאפס ב- $x=1$.

מצוידים בתובנות אלה, נבדוק מי מהטענות נכונה:

א. $h_{(x)}$ גזירה פעמיים. נכון, כי $h''_{(x)}=f'_{(x)}$ ונאמר בנתונים כי $f'_{(x)}$ קיימת (ואף שלילית) לכל x .

ב. $h_{(x)}$ וגם $\frac{dh}{dx}$ הן פונקציות רציפות. נכון, כי אם $f'_{(x)}$ קיימת לכל x אז $f_{(x)}=h'_{(x)}$ רציפה - גזירות משמעה רציפות. מאותו הטעם, אם $h'_{(x)}$ רציפה אז $h_{(x)}$ רציפה.

ג. לגרף של $h_{(x)}$ יש משיק אופקי ב- $x=1$. נכון, הסברנו קודם שהשיפוע של $h_{(x)}$ מתאפס ב- $x=1$.

ד. לגרף של $h_{(x)}$ יש מקסימום מקומי ב- $x=1$. נכון, כי השיפוע של $h_{(x)}$ מתאפס ב- $x=1$ ו- $h_{(x)}$ קמורה שם.

ה. לגרף של $h_{(x)}$ יש מינימום מקומי ב- $x=1$. לא נכון, השיפוע של $h_{(x)}$ מתאפס אומנם ב- $x=1$ אך $h_{(x)}$ אינה קעורה שם.

ו. לגרף של $h_{(x)}$ יש נקודת פיתול ב- $x=1$. לא נכון, כי אין ב- $x=1$ מעבר מקמירות לקעירות או להיפך.

ז. הגרף של $\frac{dh}{dx}$ חותך את ציר X ב- $x=1$. נכון, כי $h'_{(1)}=f_{(1)}=0$ (נאמר בנתונים).

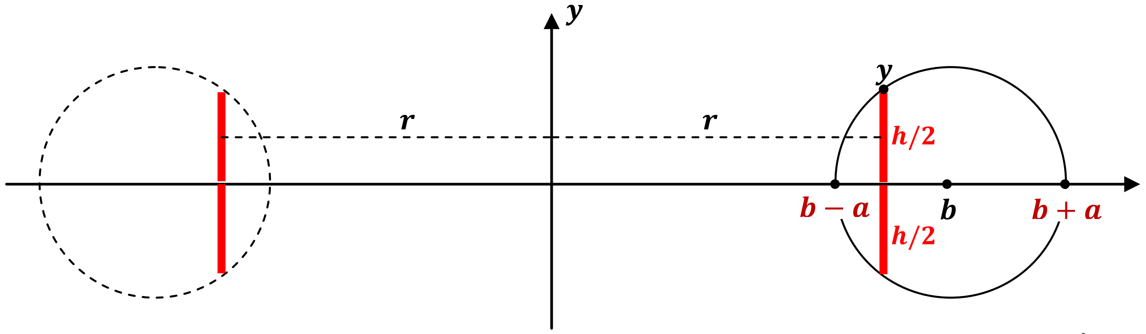
5. שימושי האינטגרל – הטענה של פפוס Pappus

היווני פַּפּוּס, מהמאה השלישית לספירה שחי באלכסנדריה, הראה כי ניתן לחשב את נפחו הסיבובי של גוף על פי מרחק התנועה של מרכז הכובד שלו (בהנחה שהגוף הומוגני). הטענה של פפוס: אם נסובב משטח סגור כלשהו סביב ציר הנמצא מחוץ למשטח הסגור, אז נפח הגוף שנוצר שווה לשטח המשטח הסגור כפול המרחק שעובר מרכז כובדו במהלך הסיבוב.

כדי שאבין שאתה מבין את טענתו, נתבונן בדוגמא הבאה: צייר מעגל שרדיוסו a ומרכזו בנקודה $(b,0)$. $a<b$.

סובב את משטח המעגל סביב ציר ה- y כדי לקבל בייגלה אחיד. השתמש בשיטת הדיסקות או הקליפות הגליליות (הדיסקות עדיפה) כדי לחשב את נפח הגוף שנוצר. הסבר את המשפט של פפוס.

פיתרון :



משוואת המעגל היא :

$$(x-b)^2+y^2=a^2 \quad => \quad y^2=a^2-(x-b)^2 \quad => \quad y=\sqrt{a^2-(x-b)^2}$$

בשיטת הקליפות (דווקא): שטח המעטפת של קליפה גלילית הינו מכפלת היקפה $2\pi r$ בגובהה h .
רדיוסה r הוא מרחקה מציר y (ציר הסיבוב), ז"א $r=x$. גובהה h הינו $2y$.

$$A = 2\pi rh = 2\pi x\cdot 2y = 4\pi x\sqrt{a^2-(x-b)^2}$$

נפחה של קליפה גלילית – אלמנט נפח דיפרנציאלי - הינו מכפלת שטח המעטפת שלה A בעובי הדופן שלה dx :

$$dV = 4\pi x\sqrt{a^2-(x-b)^2}\cdot dx \quad \rightarrow \quad u=x-b \quad => \quad x=u+b \quad , \quad du=dx$$

$$dV = 4\pi(u+b)\sqrt{a^2-u^2}\cdot du \quad \rightarrow \quad u=a\,sint \quad => \quad du=a\,cost\,dt$$

$$dV = 4\pi(a\,sint+b)\sqrt{a^2-a^2sin^2t}\cdot a\,cost\,dt = 4\pi a(a\,sint+b)\sqrt{1-sin^2t}\cdot a\,cost\,dt =$$

$$= 4\pi a(a\,sint+b)cost\cdot a\,cost\,dt = 4\pi a^2cos^2t(a\,sint+b)dt = \left(4\pi a^3cos^2t\cdot sint + 4\pi a^2b\,cos^2t\right)dt$$

אינטגרציה של אינסוף קליפות כאלה בתחום $x[b-a\ ,\ b+a]\rightarrow u[-a\ ,\ a]\rightarrow t[-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}]$ תניב את נפחו של הבייגלה :

$$4\pi a^3\int_{-\pi/2}^{\pi/2}cos^2t\cdot sint\cdot dt + 4\pi a^2b\int_{-\pi/2}^{\pi/2}cos^2t\cdot dt =$$

$$\int cos^2t\cdot sint\cdot dt \quad => \quad \begin{Bmatrix}u=cost\\ du=-sint\cdot dt\end{Bmatrix} = -\int u^2du = -\frac{u^3}{3} = -\frac{cos^3t}{3}$$

$$\int cos^2t\cdot dt = \frac{1}{2}\int(cos2t+1)dt = \frac{1}{2}\left(\frac{sin2t}{2}+t\right) = \frac{sin2t}{4}+\frac{t}{2}$$

$$= 4\pi a^3\left[-\frac{cos^3t}{3}\right|_{-\pi/2}^{\pi/2} + 4\pi a^2b\left[\frac{sin2t}{4}+\frac{t}{2}\right|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0 + 4\pi a^2b\left[0+\frac{\pi}{4}-\left(0-\frac{\pi}{4}\right)\right] = 2\pi^2a^2b$$

$$2\pi^2a^2b = \pi a^2\cdot 2\pi b = \pi R^2\cdot 2\pi r_{cm} = surface\ area\cdot distance\ travelled\ by\ its\ centre\ of\ mass$$