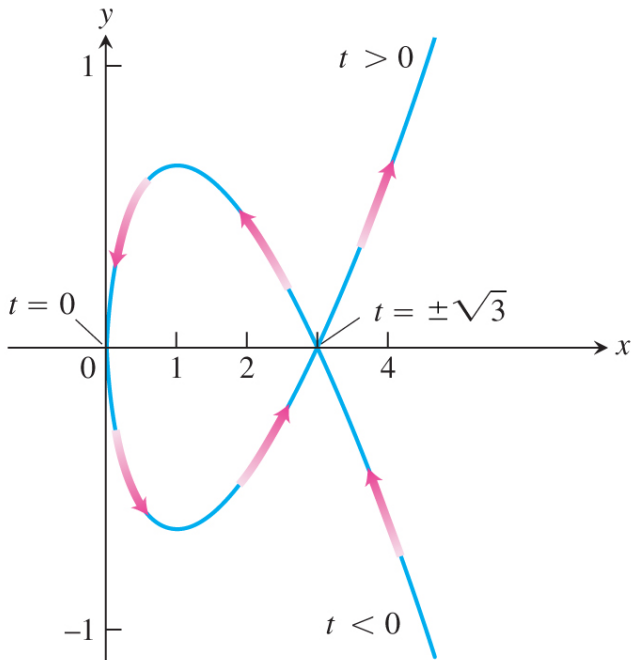


מצא את אורכה של הלולאה שבצויר. המתוארת על ידי  $x = t^2$  ו-  $y = \frac{t^3}{3} - t$ .  
 הלולאה מתחילה ב-  $t = -\sqrt{3}$  ומסתיימת ב-  $t = \sqrt{3}$ .



הנוסחה לאורך של  $y = f(x)$  ,  $a \leq x \leq b$  :

אם  $f$  גזירה על האינטרוול הסגור  $[a, b]$  ,

אז אורך העקום  $y = f(x)$  מ-  $x = a$  ל-  $x = b$  הינו :

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

נתנו לנו משוואות פרמטריות ל-  $x$  ו-  $y$  , כך יש לנו שתי אפשרויות :

1. לבטא את  $y$  כתלות ב-  $x$  (כאן זה אפשרי) ואז לגזור לפי  $x$  .

2. להשתמש בנוסחה הפרמטרית למציאת  $\frac{dy}{dx}$  .

נלך על האפשרות השנייה כדי להתכונן למקרים פרמטריים שבהם לא ניתן לבדוד את  $y$  ולבטאו כתלוי ב-  $x$  בלבד.

נוסחה פרמטרית למציאת  $\frac{dy}{dx}$

אם כל שלוש הנגזרות קיימות, ו-  $\frac{dx}{dt} \neq 0$  , אז

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

$$x = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{x}$$

$$t = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x = 3$$

$$t = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\left. \begin{aligned} y = \frac{t^3}{3} - t &\Rightarrow dy/dt = t^2 - 1 \\ x = t^2 &\Rightarrow dx/dt = 2t \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{t^2 - 1}{2t} = \frac{x - 1}{2\sqrt{x}}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^3 \sqrt{1 + \left(\frac{x-1}{2\sqrt{x}}\right)^2} dx = \int_0^3 \sqrt{1 + \frac{(x-1)^2}{4x}} dx =$$

$$= \int_0^3 \sqrt{\frac{x^2 + 2x + 1}{4x}} dx = \int_0^3 \sqrt{\frac{(x+1)^2}{4x}} dx = \int_0^3 \frac{x+1}{2\sqrt{x}} dx = \int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{2} dx + \int_0^3 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx =$$

$$= \left[ \frac{1}{3}x^{3/2} + \sqrt{x} \right]_0^3 = \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \Rightarrow 2L = 4\sqrt{3} \leftarrow \text{whole loop}$$