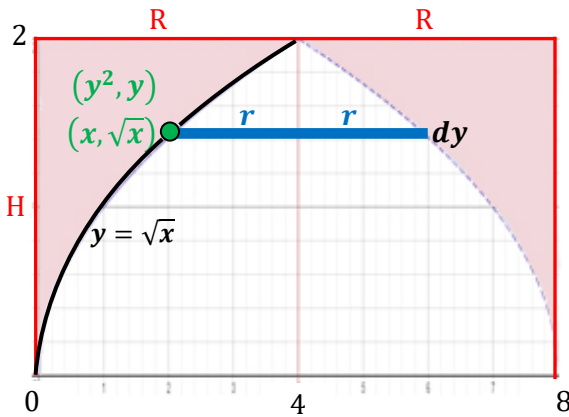


סובב את השטח המוגבל על ידי $y(x) = \sqrt{x}$, $x = 0$, ו- $y(x) = 2$ סביב הציר $x = 4$.
 חשב את נפח הגוף שנוצר, פעם אחת בשיטת הדיסקות ופעם שנייה בשיטת הקליפות הגליליות.

פיתרון:

נוצרת מעין מאפרה הפוכה. אנו מתבקשים לחשב את נפח החומר שממנו היא עשויה, ללא האוויר הלבן שבתוכה.



בשיטת הדיסקות, נחשב ראשית את נפח האוויר שבמאפרה :

רדיוסה של דיסקה אופקית הוא $r(x) = 4 - x$.

שטחה הוא $A(x) = \pi r^2 = \pi(4 - x)^2$. עובייה הוא dy .

נפחה הוא מכפלת שטחה בעובייה : $dV_{(x,y)} = A \cdot dy = \pi(4 - x)^2 dy$:

יש לבטא את dV כפונקציה של x בלבד או של y בלבד, מה עדיף ?

במקרה דנן, $dV_{(y)}$ נראה קצת פשוט יותר לאינטגרציה מאשר $dV_{(x)}$:

$$dV_{(y)} = \pi(4 - y^2)^2 dy = \pi(y^4 - 8y^2 + 16)dy$$

אינטגרציה של אינסוף דיסקות כאלה, החל בתחתונה אשר נמצאת בגובה 0 (רדיוסה 4) וכלה בעליונה אשר נמצאת בגובה 2

(רדיוסה 0), תניב את נפח האוויר שבמאפרה - V_{AIR} :

$$V_{AIR} = \pi \int_0^2 (y^4 - 8y^2 + 16) dy = \pi \left[\frac{y^5}{5} - \frac{8y^3}{3} + 16y \right]_0^2 = \pi \left(\frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32 - (0) \right) = \frac{256}{15}\pi$$

נעת נחשב את נפחה של המאפרה כולה - חומר + אוויר. זהו גליל שרדיוסו בסיסו $R = 4$, צירו $x = 4$, וגובהו $H = 2$.

נפחו מתקבל ממכפלת שטח בסיסו בגובהו : $V_{CYLINDER} = \pi \cdot R^2 \cdot H = \pi \cdot 4^2 \cdot 2 = 32\pi$:

לבסוף, כדי לקבל את נפח החומר, נפחית מנפח הגליל את נפח האוויר :

$$V_{MATERIAL} = V_{CYLINDER} - V_{AIR} = 32\pi - \frac{256}{15}\pi = \frac{224}{15}\pi \approx 46.9 \text{ (Cubic Units)}$$

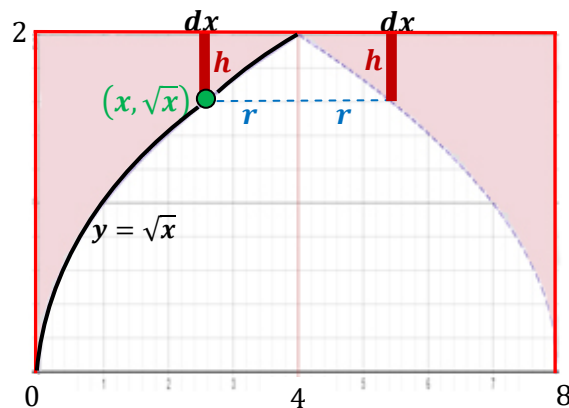
בשיטת הקליפות, נחשב ישירות את הנפח המבוקש - נפח החומר :

גובהה של קליפה גלילית היא $h(x) = 2 - \sqrt{x}$. רדיוסה הוא $r(x) = 4 - x$.

היקפה הוא $p(x) = 2\pi r = 2\pi(4 - x)$. עובייה (עובי הדופן) הוא dx .

שטחה הוא מכפלת היקפה בגובהה : $A_{(x)} = 2\pi(4 - x)(2 - \sqrt{x})$:

נפחה הוא מכפלת שטחה בעובייה : $dV_{(x)} = 2\pi(x - 4)(\sqrt{x} - 2)dx$:



אינטגרציה של אינסוף קליפות כאלה, החל בחיצונית (רדיוסה 4 וגובהה 2) וכלה בפנימית (רדיוסה 0 וגובהה 0), תניב את

הנפח המבוקש - נפח החומר :

$$2\pi \int_0^4 (x^{\frac{3}{2}} - 2x - 4x^{\frac{1}{2}} + 8) dx = 2\pi \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - x^2 - \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + 8x \right]_0^4 = 2\pi \left(\frac{32}{5} - 16 - \frac{32}{3} + 32 \right) = \frac{224}{15}\pi$$