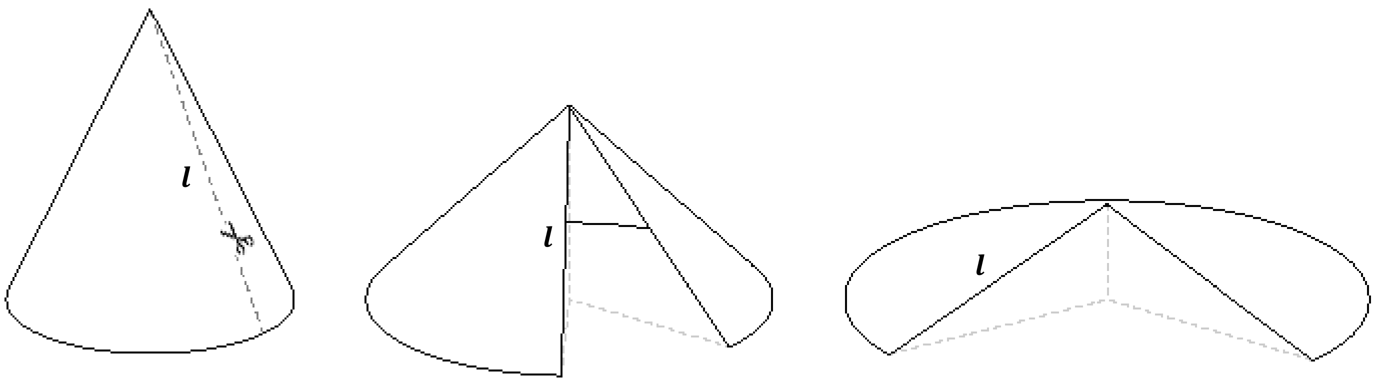
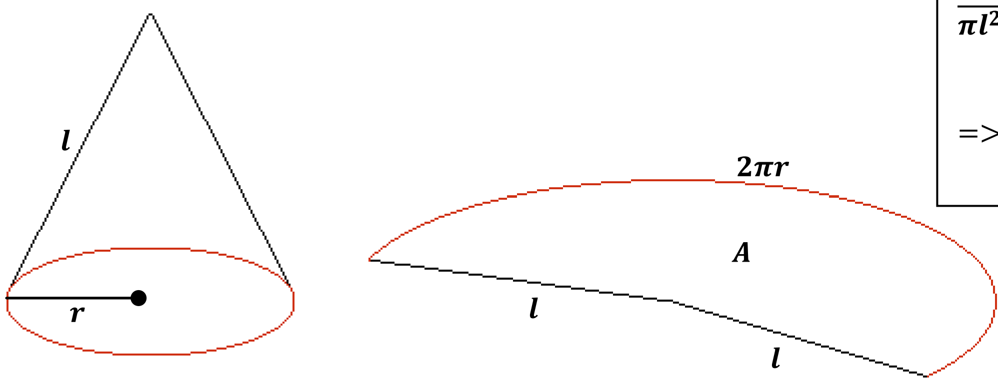
אביב 2012 – מועד א'

חשב את שטח פניו של חרוט : פעם אחת כפי שעשו זאת היוונים הקדמונים ופעם שנייה באמצעות אינטגרל.





$$\frac{A}{\pi l^2}=\frac{2\pi r}{2\pi l} \quad => \quad \frac{A}{\pi l^2}=\frac{r}{l} \quad =>$$

$$=> \quad \frac{A}{\pi l}=r \quad => \quad A=\pi r l$$

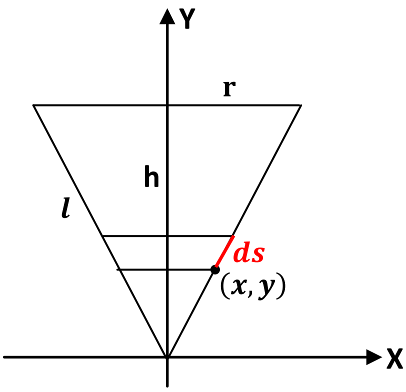
וכעת באמצעות אינטגרל : נהפוך את החרוט כך שקודקודו בראשית, ונחלקו לאינסוף טבעות אופקיות שרוחב כ"א מהן ds .

שטח הפנים של כל טבעת כזו- dA, שווה למכפלת היקפה ברוחבה :

$$dA = 2\pi x\cdot ds = 2\pi x\sqrt{1+m^2}dx \quad , \quad m=\frac{h}{r} \quad , \quad r^2+h^2=l^2 \leftarrow Pythagoras$$

$$A = 2\pi\sqrt{1+m^2}\int_0^r x dx = \pi\sqrt{1+m^2}\cdot[x^2\Big|_0^r = \pi\sqrt{1+m^2}\cdot(r^2-0) =$$

$$\pi r^2\sqrt{1+\left(\frac{h}{r}\right)^2} = \pi r^2\sqrt{1+\frac{h^2}{r^2}} = \pi r^2\sqrt{\frac{r^2+h^2}{r^2}} = \pi r^2\sqrt{\frac{l^2}{r^2}} = \pi r^2\cdot\frac{l}{r} = \pi r l$$



אורך קטע קצרצר של עקום $y=f_{(x)}$ הוא : $dS=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$

כאן $\frac{dy}{dx}=m$ מפני שהעקום הינו קו ישר ששיפועו m .