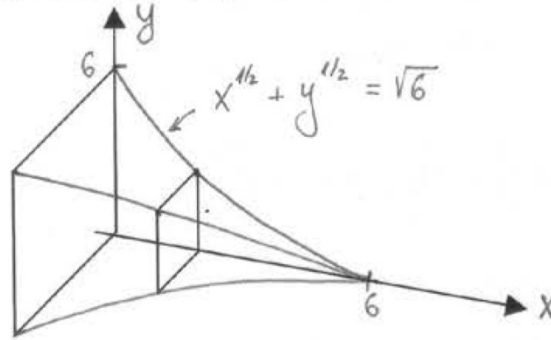


1. (34 נקודות) מצא את הנפח הכלוא בתוך דגם של מגדל אייפל. הנח כי צלע המגדל נתונה על ידי הביטוי $x^{1/2} + y^{1/2} = \sqrt{6}$ וחתך של המגדל הוא ריבוע שבסיסו נע בין ציר ה-x לבין הביטוי הנתון.



פיתרון:

$$x^{1/2} + y^{1/2} = \sqrt{6} \quad \Rightarrow \quad y^{1/2} = \sqrt{6} - x^{1/2} \quad \Rightarrow \quad y = (\sqrt{6} - x^{1/2})^2 = x - 2\sqrt{6x} + 6$$

$$y = x + 6 - 2\sqrt{6x} \quad \Rightarrow \quad y^2 = [(x + 6) - 2\sqrt{6x}]^2 = (x + 6)^2 - 4(x + 6)\sqrt{6x} + 24x =$$

$$y^2 = (x + 6)^2 + 24x - 4\sqrt{6}\sqrt{x}(x + 6) = (x + 6)^2 + 24x - 4\sqrt{6} \cdot x^{3/2} - 24\sqrt{6} \cdot x^{1/2}$$

שטחו של החתך הוא y^2 , מפני שמדובר בריבוע אשר אורך צלעו y .

אלמנט נפח דיפרנציאלי מתקבל מהכפלת שטחו של החתך בעוביו הדיפרנציאלי dx :

$$dV = y^2 dx = ((x + 6)^2 + 24x - 4\sqrt{6}x^{3/2} - 24\sqrt{6}x^{1/2}) dx$$

אינטגרציה של אינסוף אלמנטים כאלה בתחום $[0, 6]$ תניב את הנפח המבוקש:

$$\int_0^6 ((x + 6)^2 + 24x - 4\sqrt{6} \cdot x^{3/2} - 24\sqrt{6} \cdot x^{1/2}) dx =$$

$$= \left[\frac{(x + 6)^3}{3} + 12x^2 - \frac{2}{5} 4\sqrt{6} \cdot x^{5/2} - \frac{2}{3} 24\sqrt{6} \cdot x^{3/2} \right]_0^6 =$$

$$= \frac{12^3}{3} + 432 - \frac{2}{5} 4\sqrt{6} \cdot 6^{5/2} - \frac{2}{3} 24\sqrt{6} \cdot 6^{3/2} - \left(\frac{216}{3} \right) = 576 + 432 - \frac{2}{5} 4 \cdot 6^3 - \frac{2}{3} 24 \cdot 6^2 - \frac{216}{3}$$

$$= 576 + 432 - \frac{8}{5} \cdot 6^3 - 16 \cdot 6^2 - \frac{216}{3} = \frac{72}{5} = 14.4 \text{ (Cubic Units)}$$