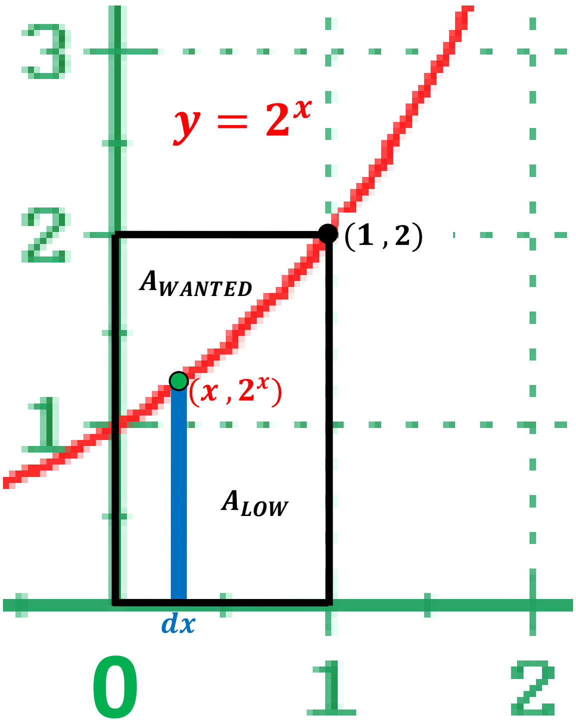
מועד א' חורף 2010 – שימושי האינטגרל

א. חשב את השטח המוגבל על ידי $y = 2^x$, $y = 2$ ו- $x = 0$.
ב. חשב את נפח הגוף המתקבל מסיבוב השטח מסעיף א' סביב ציר ה- **X** .



פיתרון א' - חישוב השטח :

מהו **X** כאשר $y = 2$? $\quad y = 2^x \;=>\; 2 = 2^x \;=>\; x = 1$

שטח המלבן השחור הינו $\quad A_{TOTAL} = 1 \cdot 2 = 2\ (Area\ Units)$

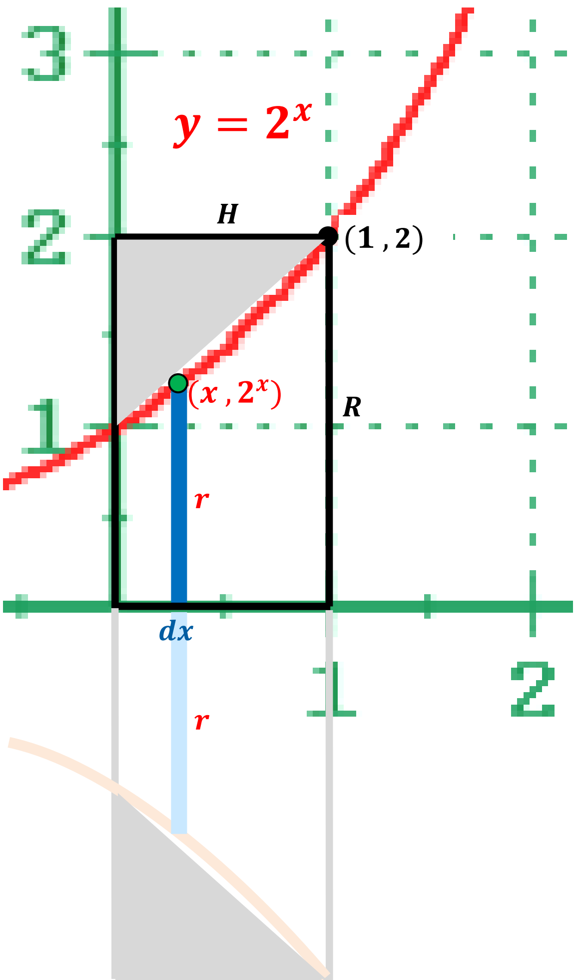
שטח המלבן הדיפרנציאלי האנכי (כחול) הינו $dA = 2^x dx$.

אינטגרציה של אינסוף מלבנים כאלה לרוחב התחום $[0, 1]$ תניב את השטח A_{LOW} אשר מתחת לגרף האדום ובתוך המלבן השחור :

$$\int_0^1 2^x dx = \left[2^x / ln2 \right|_0^1 = 2/ln2 - 1/ln2 = 1/ln2$$

נחסר שטח זה משטח המלבן השחור ונקבל את השטח המבוקש :

$$A_{WANTED} = A_{TOTAL} - A_{LOW} = 2 - 1/ln2\ \ (Area\ Units)$$



פיתרון ב' - נפח הגוף המתקבל מסיבוב השטח הנ"ל סביב ציר ה- X :

מסיבוב של המלבן השחור סביב ציר ה- X מתקבל גליל גדול שנפחו

$$V_{TOTAL} = \pi R^2 H = \pi \cdot 2^2 \cdot 1 = 4\pi$$

מסיבוב של המלבן הדיפרנציאלי הכחול סביב ציר ה- X מתקבלת דסקה דיפרנציאלית אנכית שנפחה

$$dV = \pi r^2 h = \pi \cdot (2^x)^2 \cdot dx = \pi \cdot 2^{2x} \cdot dx$$

אינטגרציה של אינסוף דסקות כאלה לרוחב התחום $[0, 1]$ תניב את הנפח V_{INNER} – חלקו הפנימי של V_{TOTAL} אשר "נוגע" בציר ה- X :

$$V_{INNER} = \pi \int_0^1 2^{2x} \cdot dx = \pi \left[2^{2x} / 2ln2 \right|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{2ln2} \left[2^{2 \cdot 1} - 2^{2 \cdot 0} \right] = \frac{\pi}{2ln2} [4 - 1] = \frac{3\pi}{2ln2}$$

כעת נחסר נפח זה מנפח הגליל הגדול ונקבל את הנפח המבוקש :

$$V_{WANTED} = V_{TOTAL} - V_{INNER} = 4\pi - \frac{3\pi}{2ln2} =$$

$$= \left(4 - \frac{3}{2ln2} \right) \pi \approx 5.768\ (Cubic\ Units)$$