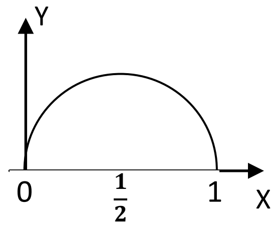
חורף 2003 מועד ב'

1. מהו הערך הגדול ביותר שיכול לקבל האינטגרל $\int_a^b \sqrt{x-x^2}\,dx$ לכל a ו- b ? תן סיבות לתשובתך.

פיתרון :

אנו נשאלים בעצם מהו השטח הגדול ביותר שניתן לקבל תחת הגרף $y=\sqrt{x-x^2}$, שהינו גרף של חצי מעגל :

$$y=\sqrt{x-x^2} \quad => \quad y^2=x-x^2 \quad => \quad x^2-x+y^2=0 \quad => \quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$



התשובה היא שטחו של חצי המעגל: $\frac{1}{2}\pi R^2=\frac{1}{2}\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\pi}{8}\ (Square\ Units)$

ערך מרבי זה מתקבל כאשר $a=0$ ו- $b=1$

2. נתון כי $f_{(x)}=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & , \quad 0<x\le\pi \\ 1 & , \quad x=0\end{cases}$

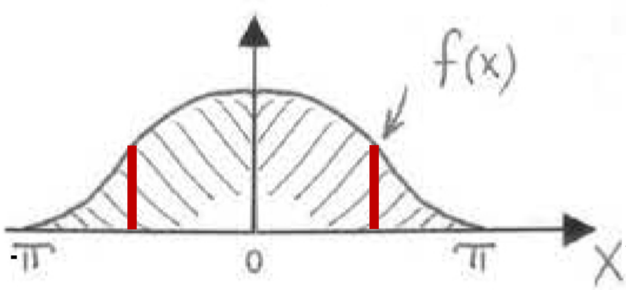
א. הראה כי $xf_{(x)}=\sin x$ עבור $0\le x\le\pi$

פיתרון:

$$x\cdot f_{(x)} = \begin{cases}\sin x & , \quad 0<x\le\pi \\ x & , \quad x=0\end{cases} = \begin{cases}\sin x & , \quad 0<x\le\pi \\ 0 & , \quad x=0\end{cases} = \begin{cases}\sin x & , \quad 0<x\le\pi \\ \sin 0 & , \quad x=0\end{cases} =$$

$$= \begin{cases}\sin x & , \quad 0<x\le\pi \\ \sin x & , \quad x=0\end{cases} = \sin x \quad for \quad 0\le x\le\pi$$

ב. מהו נפח הגוף אשר מתקבל מסיבוב השטח הכלוא מתחת לעקומה (ראה ציור) סביב ציר y ?



פיתרון:

בשיטת הקליפות הגליליות : שטח המעטפת של קליפה גלילית הוא

$$A_{(x)} = 2\pi r\cdot h = 2\pi x\cdot y = 2\pi x\cdot\frac{\sin x}{x} = 2\pi\cdot\sin x$$

נפח ה"חומר" שבקליפה הגלילית - אלמנט נפח דיפרנציאלי - מתקבל מהכפלת שטח המעטפת שלה בעובי הדופן שלה :

$$dV_{(x)} = 2\pi\cdot\sin x\cdot dx$$

אינטגרציה של אינסוף קליפות כאלה בתחום $[0,\pi]$ תניב את הנפח המבוקש :

$$V = 2\pi\int_0^{\pi}\sin x\cdot dx = -2\pi\cos x\Big|_0^{\pi} = -2\pi(\cos\pi-\cos 0) = -2\pi(-1-1) = 4\pi\ (Cubic\ Units)$$