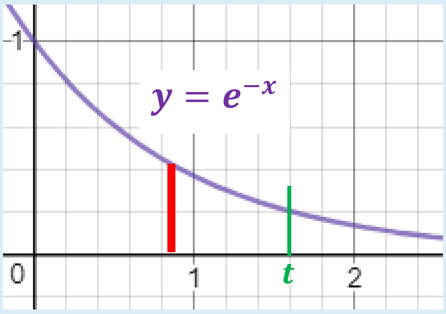
נסמן על ידי $A(t)$ את השטח ברביע הראשון הכלוא בין הצירים, העקומה $y(x)=e^{-x}$ והקו האנכי $x=t$, $t>0$.
נסמן על ידי $V(t)$ את נפח הגוף הנוצר על ידי סיבוב השטח הכלוא סביב ציר x. מצא את הגבולות:



א.

$$\lim_{t\to\infty} A(t)$$

ב.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{V(t)}{A(t)}$$

ג.

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{V(t)}{A(t)}$$

$$A_{(t)} = \int_0^t e^{-x}dx = -[e^{-x}\Big|_0^t = -[e^{-t}-1] = 1-e^{-t}$$

$$\lim_{t\to\infty} A_{(t)} = \lim_{t\to\infty}(1-e^{-t}) = (1-0) = 1$$

$$V_{(t)} = \pi\int_0^t e^{-2x}dx = -\frac{\pi}{2}[e^{-2x}\Big|_0^t = -\frac{\pi}{2}[e^{-2t}-1] = \frac{\pi}{2}(1-e^{-2t})$$

$$\lim_{t\to\infty} V_{(t)} = \frac{\pi}{2}\lim_{t\to\infty}(1-e^{-2t}) = \frac{\pi}{2}(1-0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{V_{(t)}}{A_{(t)}} = \frac{\lim_{t\to\infty} V_{(t)}}{\lim_{t\to\infty} A_{(t)}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{1} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{t\to 0^+} A_{(t)} = \lim_{t\to 0^+}(1-e^{-t}) = (1-1) = 0$$

$$\lim_{t\to 0^+} V_{(t)} = \frac{\pi}{2}\lim_{t\to 0^+}(1-e^{-2t}) = \frac{\pi}{2}(1-1) = 0$$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{V_{(t)}}{A_{(t)}} = \frac{\lim_{t\to 0^+} V_{(t)}}{\lim_{t\to 0^+} A_{(t)}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \frac{\lim_{t\to 0^+} V'_{(t)}}{\lim_{t\to 0^+} A'_{(t)}} = \frac{\frac{\pi}{2}\cdot 2\lim_{t\to 0^+}(e^{-2t})}{\lim_{t\to 0^+} e^{-t}} = \frac{\pi\cdot 1}{1} = \pi$$