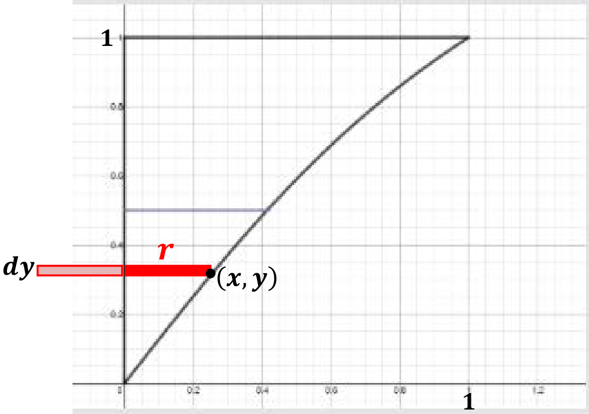
חשב את נפח הגוף המתקבל ע"י סיבוב התחום סביב ציר ה - $y$




$$0<y<1,\ x=\tan\left(\left(\frac{\pi}{4}\right)y\right)$$

פיתרון בדיסקות:

$$dV = \pi r^2 h = \pi tg^2\left(\frac{\pi}{4}y\right)dy = \pi\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}y\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}y\right)}dy = \pi\frac{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}y\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}y\right)}dy = \pi\left(\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}y\right)}-1\right)dy$$

$$V = \int_a^b dv = \pi\int_0^1\left(\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}y\right)}-1\right)dy = \pi\left[\frac{4}{\pi}\tan\left(\frac{\pi}{4}y\right)-y\Big|_0^1\right. = \pi\left[\frac{4}{\pi}-1\right] = 4-\pi$$

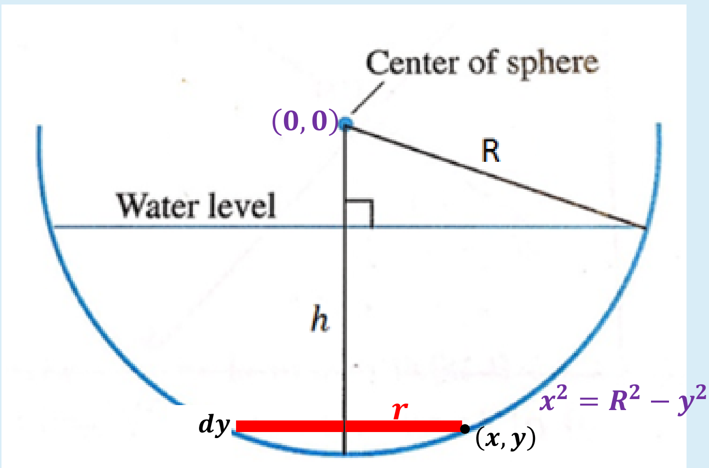
נתון מיכל כדורי שרדיוסו $R$ מטרים. עומק המים במיכל הוא $h$ מטרים. מהו נפח המים במיכל כתלות ב-$h$?

$$dV = \pi r^2 dy = \pi x^2 dy = \pi(R^2-y^2)dy$$

$$V = \int_a^b dv = \pi\int_{R-h}^{R}(R^2-y^2)dy =$$

$$= \pi\left[R^2y-\frac{y^3}{3}\Big|_{R-h}^{R}\right. = \frac{\pi}{3}\left\{y[3R^2-y^2\Big|_{R-h}^{R}\right\} =$$

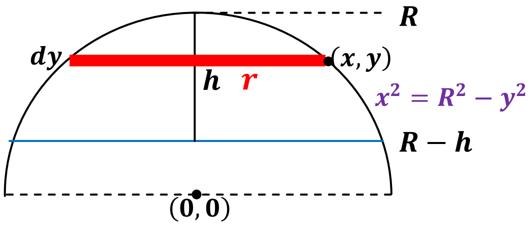
$$= \frac{\pi}{3}\{R[3R^2-R^2]-(R-h)[3R^2-(R-h)^2]\} =$$




$$= \frac{\pi}{3}\{2R^3-(R-h)[2R^2+2Rh-h^2]\} =$$

$$= \frac{\pi}{3}\{2R^3-(2R^3+2hR^2-Rh^2-2hR^2-2Rh^2+h^3)\} = \frac{\pi}{3}\{3Rh^2-h^3\} =$$

$$= \frac{\pi}{3}h^2\{3R-h\}$$




באיור מימין מתואר מה דמיינתי כשקבעתי את גבולות האינטגרציה.

הפכתי את המיכל הכדורי ומיקמתי את <u>מרכז הכדור</u> ב- $(0,0)$.

במועד א' תשע"ז שאלה מס' 5 מציע יאיר גבולות אינטגרציה פשוטים יותר

באמצעות מיקום <u>תחתית המיכל</u> ב- $(0,0)$ [ ואז $x^2=R^2-(y-R)^2$ ].