1. גבול בעזרת ε ו-δ. בשאלה זו אנו מסבירים מדוע הקווים על דופן של כלי קיבול בן 1 ליטר, הם ברוחב של כ-1מ״מ.

נתון כלי כנ״ל למדידת נפח של מים. הכלי הוא גליל ישר שרדיוסו 6 ס״מ. על פי הביטוי המתמטי לנפח גליל, נפח המים בכלי, V, תלוי בגובה פני המים, h, באופן הבא: $V=\pi 6^2 h=36\pi h$. עלינו למלא את הכלי ב- 1 ליטר מים (1000 סמ״ק) עם שגיאה שלא תעלה על 1% (10 סמ״ק).

מהגדרת הגבול: $\lim_{x\to x_o} f(x)=L$. עליך להמיר למונחים המתאימים למקרה שלנו.

א. מהי הפונקציה? 5 נקו׳.

ב. מהו גבולה? 5 נקו׳.

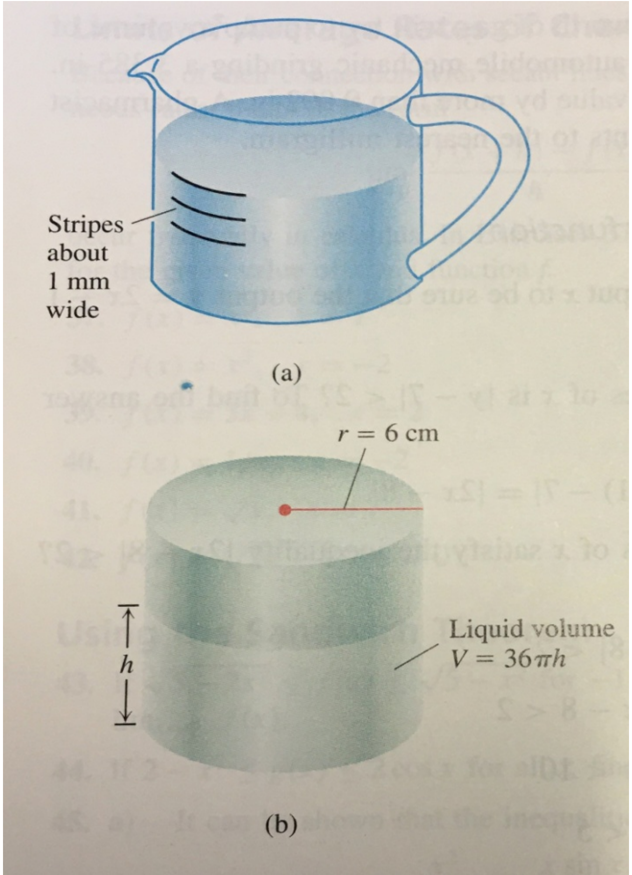
ג. מי הוא x_0? (מספיק לדייק עד שתי ספרות אחרי הנקודה) 5 נקו׳.

ד. מהו ה-ε? 5 נקו׳.

ה. מי היא ה-δ? 5 נקו׳.

ו. מהו טווח הערכים של גובה המים? מדוע רוחב הקווים כ-1 מ״מ? 5 נקו׳.

ז. צייר הפונקציה. סמן את הגבול בעזרת ε ו-δ. 5 נקו׳.



1.15 A 1-L measuring cup (a), modeled as a right circular cylinder (b) of radius r = 6 cm (Example 2).

פיתרון:

א. הפונקציה היא נפח המים (V בסמ"ק) כתלות בעומקם (h בס"מ): $V_{(h)}=36\pi h$

ב. גבולה (L) של הפונקציה הוא ערכה המבוקש, ז"א נפח המים המבוקש: $L=1000cm^3$

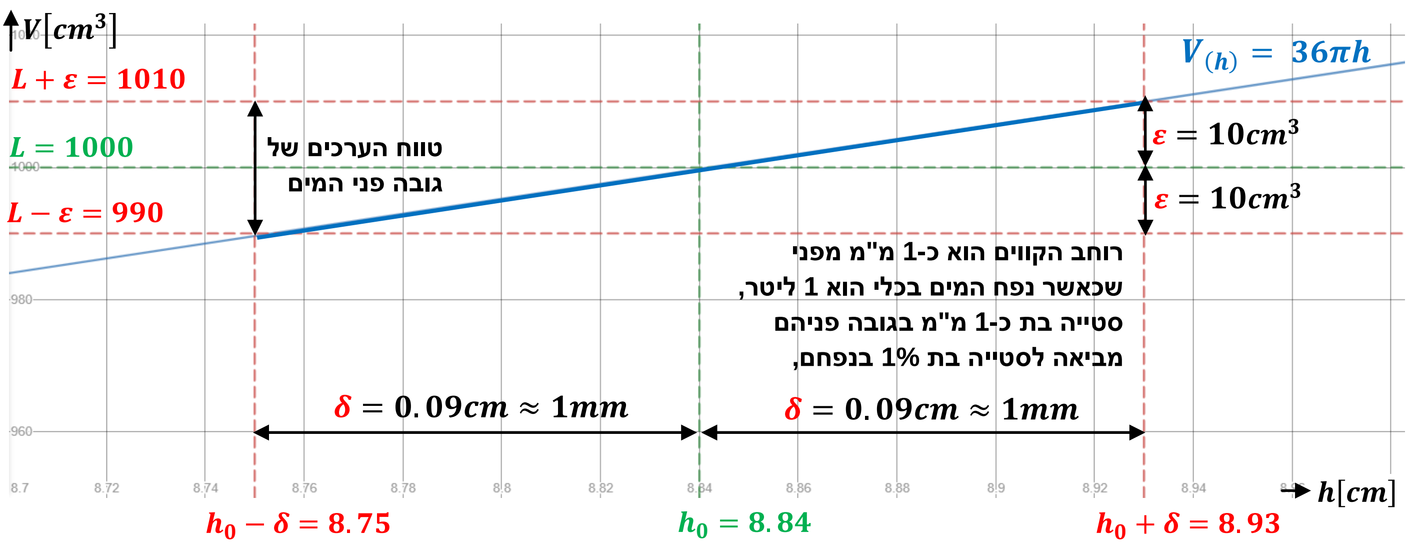
ג. x_o הוא h_o - גובה פני המים אשר מניב את נפחם המבוקש (L): $V=L \;\;=>\;\; 36\pi h_0=1000 \;\;=>\;\; h_0=8.84cm$

ד. ε הוא <u>גודל</u> הסטייה המרבית המותרת של הפונקציה (V) מערכה המבוקש (L), 10 סמ"ק במקרה דנן.

ה. δ היא <u>גודל</u> הסטייה מ- h_o של המשתנה הבלתי תלוי (h) אשר מביא לסטייה המרבית המותרת (ε) בנפחם:

$$|V_{(h)}-L|<\varepsilon \;\;=>\;\; |36\pi h-1000|<10 \;\;=>\;\; -10<36\pi h-1000<10 \;\;=>$$

$$=> \;\; 990<36\pi h<1010 \;\;=>\;\; 8.75<h<8.93 \;,\;\; |h-h_0|<\delta \;\;=>\;\; \delta=0.09cm\approx 1mm$$



$$\lim_{x\to2}\frac{2-x\cos(x-2)}{x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=?\qquad (l'hopital\ not\ allowed)$$

הומלץ ע"י המרצה להשתמש כאן בזהות לקוסינוס של זווית כפולה: $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$

$$\cos(x-2)=\cos\left(2\cdot\frac{x-2}{2}\right)=1-2\sin^2\left(\frac{x-2}{2}\right)$$

$$f_{(x)}=\frac{2-x\cos(x-2)}{x-2}=\frac{2-x\left[1-2\sin^2\left(\frac{x-2}{2}\right)\right]}{x-2}=\frac{2-x+2x\sin^2\left(\frac{x-2}{2}\right)}{x-2}=$$

$$=\frac{2-x}{x-2}+\frac{2x\sin^2\left(\frac{x-2}{2}\right)}{x-2}=-\frac{x-2}{x-2}+\frac{2x\sin^2\left(\frac{x-2}{2}\right)}{x-2}=-1+\frac{x\sin^2\left(\frac{x-2}{2}\right)}{\frac{x-2}{2}}=$$

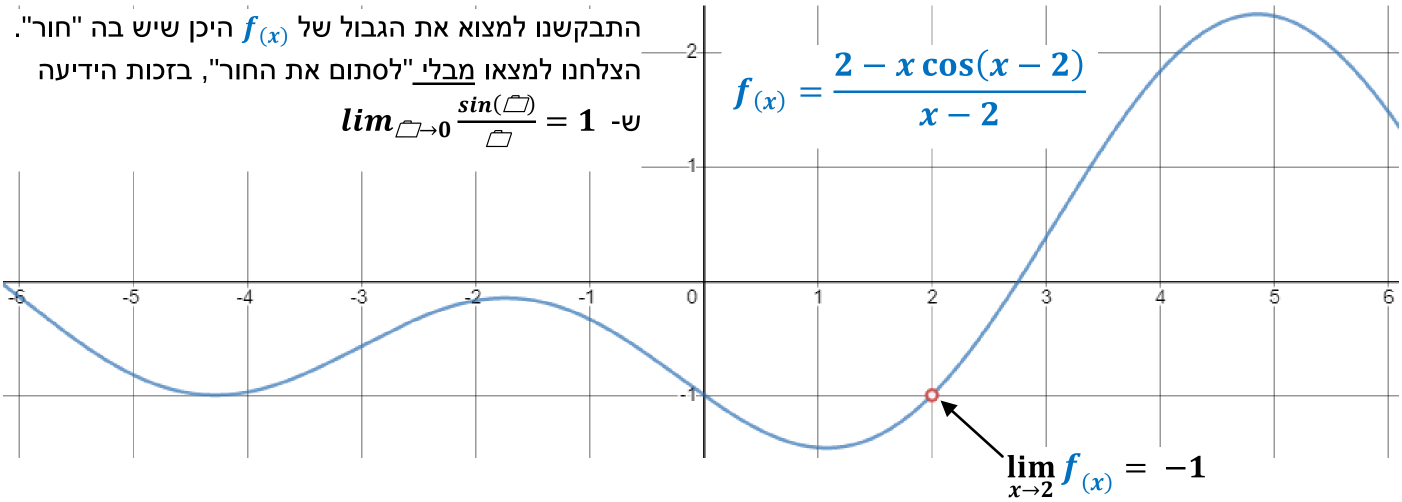
$$=-1+x\cdot\frac{\sin\left(\frac{x-2}{2}\right)}{\frac{x-2}{2}}\cdot\sin\left(\frac{x-2}{2}\right)$$

$$\lim_{x\to2}\frac{2-x\cos(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\left[-1+x\cdot\frac{\sin\left(\frac{x-2}{2}\right)}{\frac{x-2}{2}}\cdot\sin\left(\frac{x-2}{2}\right)\right]=$$

$$=\lim_{x\to2}(-1)+\lim_{x\to2}(x)\cdot\lim_{x\to2}\left[\frac{\sin\left(\frac{x-2}{2}\right)}{\frac{x-2}{2}}\right]\cdot\lim_{x\to2}\left[\sin\left(\frac{x-2}{2}\right)\right]=$$

$$=-1+2\cdot1\cdot0=-1$$

התבקשנו למצוא את הגבול של $f_{(x)}$ היכן שיש בה "חור".
הצלחנו למצוא <u>מבלי</u> "לסתום את החור", בזכות הידיעה ש- $\lim_{\square\to0}\frac{\sin(\square)}{\square}=1$



בעמוד הבא נמצא את הגבול הנ"ל ללא שימוש בזהות לקוסינוס של זווית כפולה.

$$\lim_{x\to 2}\frac{2-x\cos(x-2)}{x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=?\qquad (\boldsymbol{l'hopital\ not\ allowed})$$

$$f_{(x)}=\frac{2-x\cos(x-2)}{x-2}$$

$$g_{(x)}=\frac{2-x\cos(x-2)}{x-2}\cdot\frac{2+x\cos(x-2)}{2+x\cos(x-2)}=\frac{4-x^2\cos^2(x-2)}{(x-2)[2+x\cos(x-2)]}=$$

$$=\frac{4-x^2[1-\sin^2(x-2)]}{(x-2)[2+x\cos(x-2)]}=\frac{4-x^2+x^2\sin^2(x-2)}{(x-2)[2+x\cos(x-2)]}=$$

$$=\frac{4-x^2}{(x-2)[2+x\cos(x-2)]}+\frac{x^2\sin^2(x-2)}{(x-2)[2+x\cos(x-2)]}=$$

$$=-\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)[2+x\cos(x-2)]}+\frac{x^2\sin(x-2)}{2+x\cos(x-2)}\cdot\frac{\sin(x-2)}{x-2}=$$

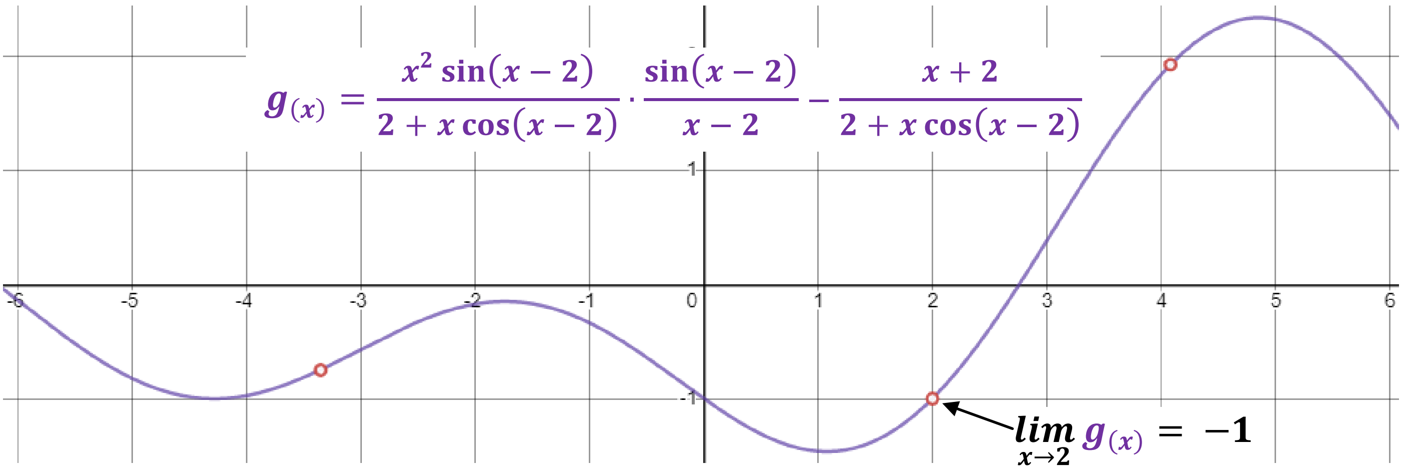
$$=g_{(x)}=\frac{x^2\sin(x-2)}{2+x\cos(x-2)}\cdot\frac{\sin(x-2)}{x-2}-\frac{x+2}{2+x\cos(x-2)}$$

$$f_{(x)}\neq g_{(x)}\qquad \boldsymbol{and\ yet}\qquad \lim_{x\to 2}f_{(x)}=\lim_{x\to 2}g_{(x)}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2-x\cos(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left[\frac{x^2\sin(x-2)}{2+x\cos(x-2)}\cdot\frac{\sin(x-2)}{x-2}-\frac{x+2}{2+x\cos(x-2)}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2\sin(x-2)}{2+x\cos(x-2)}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x-2}-\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{2+x\cos(x-2)}=$$

$$=\frac{2^2\sin(2-2)}{2+2\cos(2-2)}\cdot 1-\frac{2+2}{2+2\cos(2-2)}=\frac{0}{2+2}\cdot 1-\frac{4}{2+2}=-1$$



באמצעות "הכפלה בצמוד" המרנו את $f_{(x)}$ ל- $g_{(x)}$. נותר אומנם ה"חור" ב- $x=2$ (ונוספו אינסוף אחרים), אך $g_{(x)}$ מכילה $\frac{\sin(\square)}{\square}$ ומתקיים $\square\to 0$ כאשר $x\to 2$. אסטרטגיה דומה לזו שנקטנו בדרך הראשונה, אך בטקטיקה מסורבלת יותר.

בעמוד הבא נמצא את הגבול הנ"ל באמצעות המרת פונקצית הקוסינוס בטור החזקות שלה.

$$\lim_{x\to 2}\frac{2-x\cos(x-2)}{x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=?\qquad (l'hopital\ not\ allowed)$$

$$\square \to 0 \qquad => \qquad \cos\square \approx 1-\frac{1}{2}\cdot\square^2$$

$$x-2\to 0 \qquad => \qquad \cos(x-2)\approx 1-\frac{1}{2}\cdot(x-2)^2$$

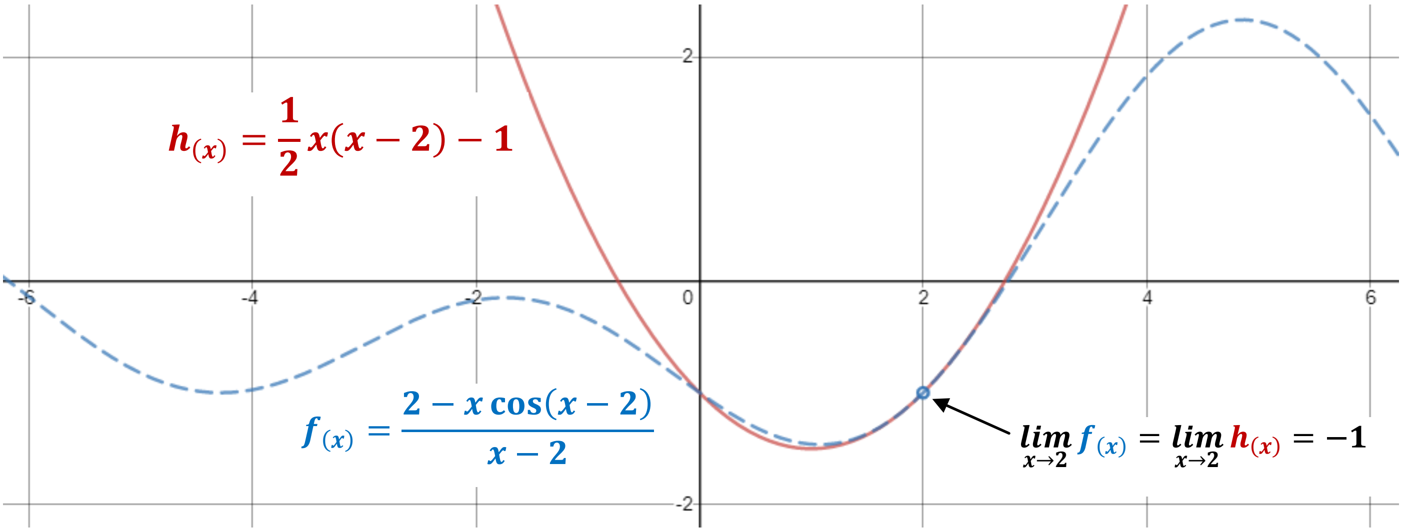
$$f_{(x)}=\frac{2-x\cos(x-2)}{x-2}$$

$$h_{(x)}=\frac{2-x\left[1-\frac{1}{2}\cdot(x-2)^2\right]}{x-2}=\frac{2-x+\frac{1}{2}x(x-2)^2}{x-2}=$$

$$=\frac{-(x-2)+\frac{1}{2}x(x-2)^2}{x-2}=\frac{(x-2)\left[\frac{1}{2}x(x-2)-1\right]}{x-2}=\frac{1}{2}x(x-2)-1$$

$$f_{(x)}\neq h_{(x)}\quad and\ yet\quad \lim_{x\to 2}f_{(x)}=\lim_{x\to 2}h_{(x)}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2-x\cos(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{2}x(x-2)-1\right]=-1$$



בזכות קרבתו של x ל- 2, יכולנו להמיר את $f_{(x)}=\frac{2-x\cos(x-2)}{x-2}$ ב- $h_{(x)}=\frac{1}{2}x(x-2)-1$ שהינה <u>רציפה</u> ב- $x=2$.

$f_{(x)}\neq h_{(x)}$ ועם זאת $\lim_{x\to 2}f_{(x)}=\lim_{x\to 2}h_{(x)}=h_{(2)}=-1$.

טור החזקות של פונקציה מהווה לה תחליף, ונושא זה נלמד בסמסטר ב'. הראנו כאן כיצד אפשר להשתמש בתחליף זה לצורך חישוב גבול של פונקציה, רק מפני שהמרצה המליץ על גישה זו לשם חישוב הגבול השני שבבוחן.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4} = \left[\frac{0}{0}\right] = ? \qquad (\boldsymbol{l'hopital\ not\ allowed})$$

הומלץ ע"י המרצה להשתמש כאן בטור חזקות:

$$\cos x = \frac{1}{0!} - \frac{1}{2!}\cdot x^2 + \frac{1}{4!}\cdot x^4 - \frac{1}{6!}\cdot x^6 + \ldots \qquad 0! = 1 \quad , \quad 2! = 2$$

כאשר $x = 0$ <u>שווה</u> האיבר הראשון בטור <u>לסכום הטור כולו</u>.

כאשר $x \to 0$ מהווה סכומם של שני האיברים הראשונים בטור <u>קירוב טוב</u> לסכום הטור כולו, או במילים אחרות, שני האיברים הראשונים בטור מהווים תחליף טוב לפונקצית הקוסינוס:

$$x \to 0 \qquad => \qquad \cos x \approx 1 - \frac{1}{2}\cdot x^2$$

אפשר להרחיב ולומר שכאשר ביטוי כלשהו ($\square$) שואף לאפס, הקוסינוס של הביטוי שווה <u>בקירוב טוב</u> לאחד מינוס חצי ריבועו של הביטוי:

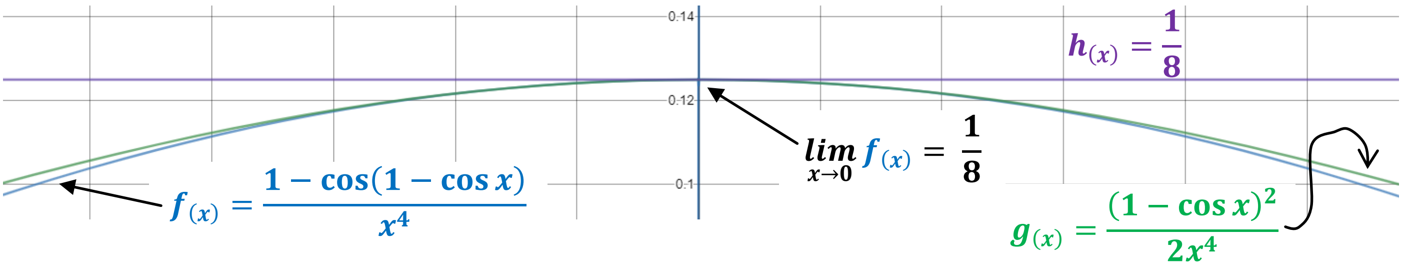
$$\square \to 0 \qquad => \qquad \cos \square \approx 1 - \frac{1}{2}\cdot \square^2$$

ולאור זאת:

$$1-\cos x \to 0 \qquad => \qquad \cos(1-\cos x) \approx 1 - \frac{1}{2}\cdot(1-\cos x)^2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\left[1-\frac{1}{2}\cdot(1-\cos x)^2\right]}{x^4} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{x^4} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\left[1-\left(1-\frac{1}{2}\cdot x^2\right)\right]^2}{x^4} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\left[\frac{1}{2}\cdot x^2\right]^2}{x^4} = \frac{1}{8}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4} = \frac{1}{8}\cdot\lim_{x\to 0} 1 = \frac{1}{8}$$



בזכות קרבתו של x ל- 0, המרנו את $f_{(x)} = \frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$ ל- $g_{(x)} = \frac{(1-\cos x)^2}{2x^4}$ והלאה (תוך סילוק החור) ל- $h_{(x)} = \frac{1}{8}$.

$f_{(x)} \neq g_{(x)} \neq h_{(x)}$ ועם זאת $\lim_{x\to 0} f_{(x)} = \lim_{x\to 0} g_{(x)} = \lim_{x\to 0} h_{(x)} = h_{(0)} = \frac{1}{8}$.

בעמוד הבא נמצא את הגבול הנ"ל ללא שימוש בטור חזקות.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}=\left[\frac{0}{0}\right]=?\qquad (l'hopital\ not\ allowed)$$

$$f_{(x)}=\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}=\frac{2sin^2\left(\frac{1-\cos x}{2}\right)}{x^4}=\frac{2sin^2\left(\frac{2sin^2\frac{x}{2}}{2}\right)}{x^4}=\frac{2sin^2\left(sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^4}$$

$$g_{(x)}=\frac{2sin^2\left(sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^4}\cdot\frac{sin^4\left(\frac{x}{2}\right)}{sin^4\left(\frac{x}{2}\right)}=2\frac{\sin\left(sin^2\frac{x}{2}\right)}{sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{\sin\left(sin^2\frac{x}{2}\right)}{sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{sin^4\left(\frac{x}{2}\right)}{x^4}=$$

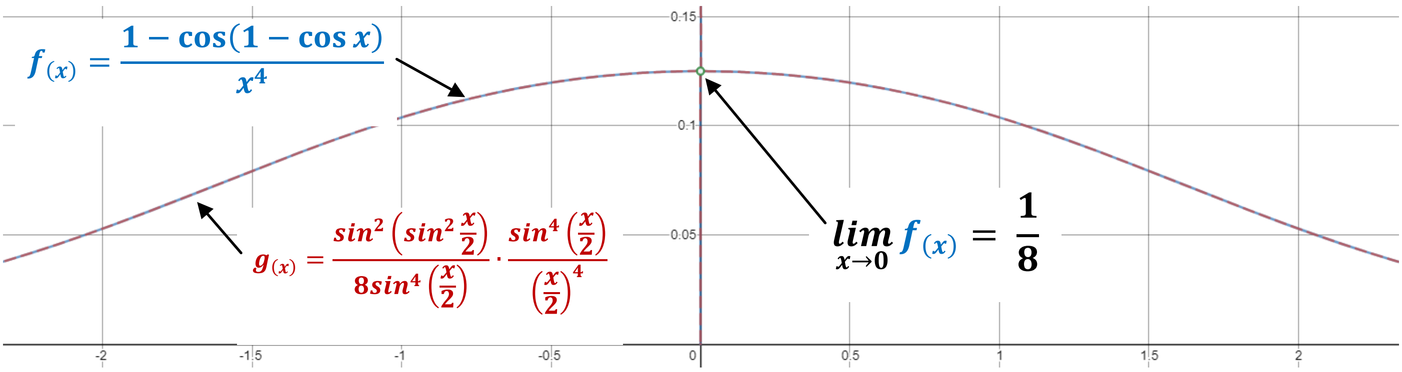
$$=2\frac{\sin\left(sin^2\frac{x}{2}\right)}{sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{\sin\left(sin^2\frac{x}{2}\right)}{sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{sin^4\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^4\cdot 2^4}=\frac{1}{2^3}\frac{\sin\left(sin^2\frac{x}{2}\right)}{sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{\sin\left(sin^2\frac{x}{2}\right)}{sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{sin^4\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^4}$$

$$f_{(x)}\neq g_{(x)}\quad and\ yet\quad \lim_{x\to 0}f_{(x)}=\lim_{x\to 0}g_{(x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{8}\frac{\sin\left(sin^2\frac{x}{2}\right)}{sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{\sin\left(sin^2\frac{x}{2}\right)}{sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{sin^4\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^4}=$$

$$=\frac{1}{8}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(sin^2\frac{x}{2}\right)}{sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(sin^2\frac{x}{2}\right)}{sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{8}$$



באמצעות הכפלה ב- $\frac{sin^4\left(\frac{x}{2}\right)}{sin^4\left(\frac{x}{2}\right)}$ המרנו את $f_{(x)}$ ל- $g_{(x)}$.

נותר אומנם ה"חור" ב- $x=0$ (ונוספו אינסוף אחרים), אך $g_{(x)}$ מכילה $\frac{sin(\square)}{\square}$ ומתקיים $\square\to 0$ כאשר $x\to 0$.

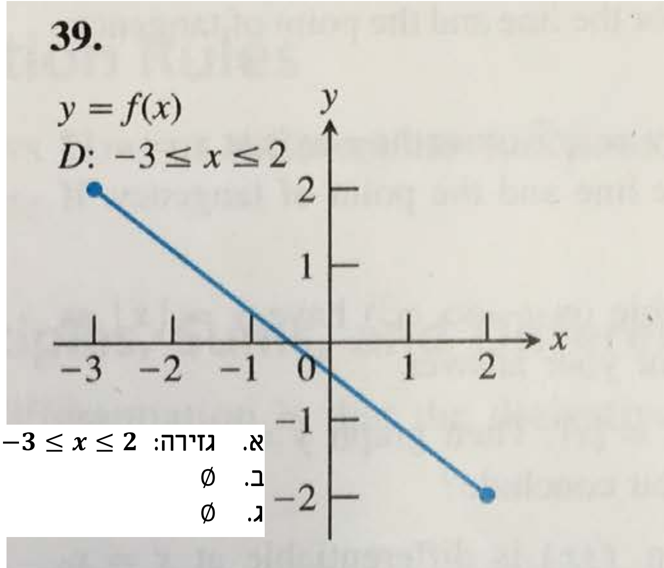
$f_{(x)}\neq g_{(x)}$ (את החורים שישנם ב- $g_{(x)}$ ואשר אינם קיימים ב- $f_{(x)}$ לא רואים בציור) ועם זאת $lim_{x\to 0}f_{(x)}=lim_{x\to 0}g_{(x)}=\frac{1}{8}$

3. כל אחד מהציורים 39-44 מתאר גרף של פונקציה בתחום סגור D.

עבור כל ציור, מהם הערכים של x שעבורם הפונקציה,

א. גזירה? ב. רציפה אך לא גזירה? ג. לא רציפה ולא גזירה?

39.

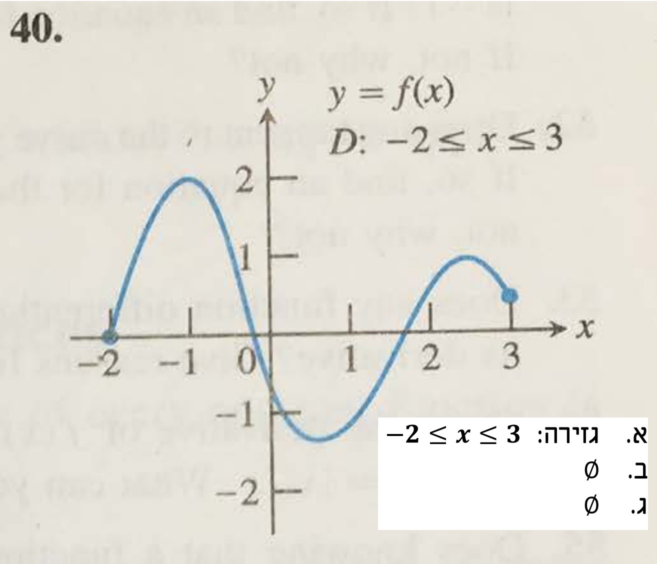


א. גזירה: $-3 \le x \le 2$

ב. $\emptyset$

ג. $\emptyset$

40.

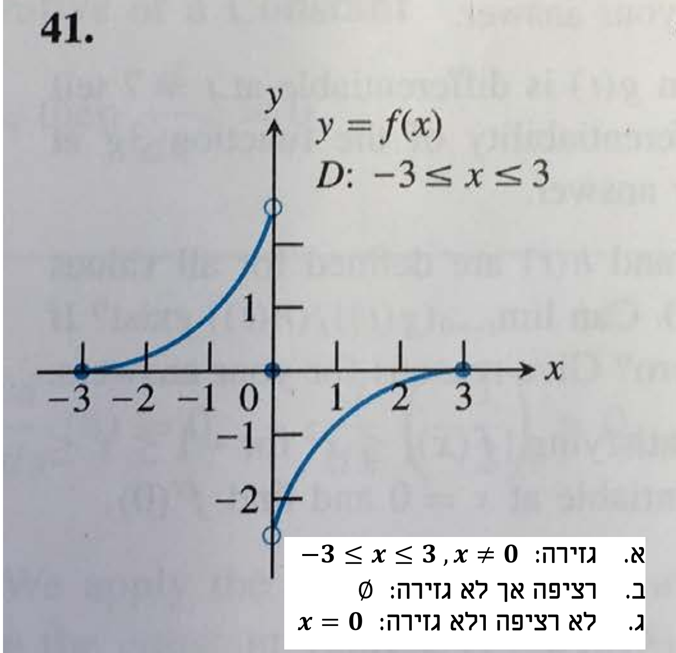


א. גזירה: $-2 \le x \le 3$

ב. $\emptyset$

ג. $\emptyset$

41.

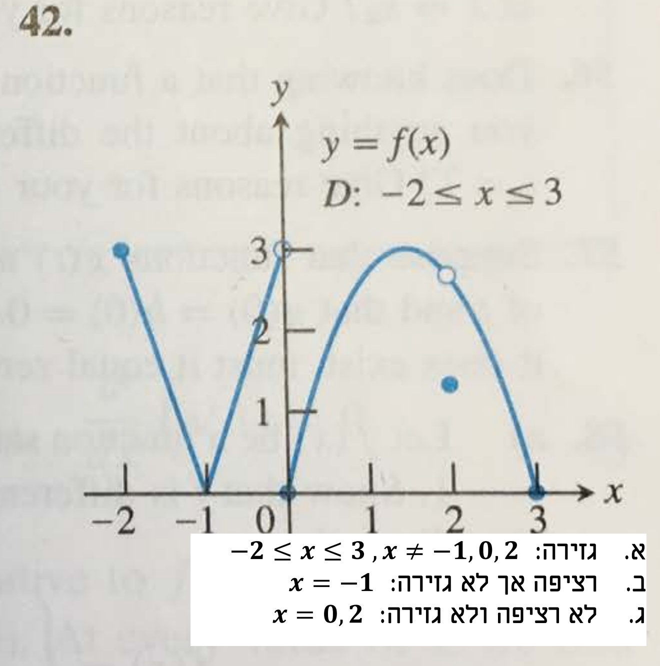


א. גזירה: $-3 \le x \le 3, x \ne 0$

ב. רציפה אך לא גזירה: $\emptyset$

ג. לא רציפה ולא גזירה: $x = 0$

42.

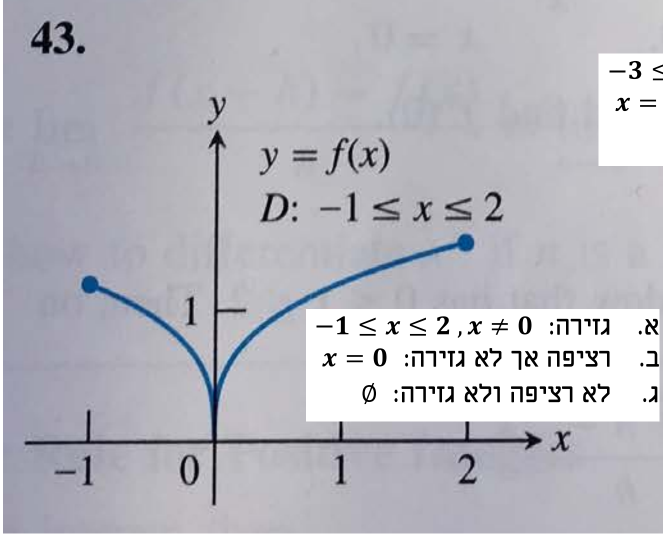


א. גזירה: $-2 \le x \le 3, x \ne -1, 0, 2$

ב. רציפה אך לא גזירה: $x = -1$

ג. לא רציפה ולא גזירה: $x = 0, 2$

43.

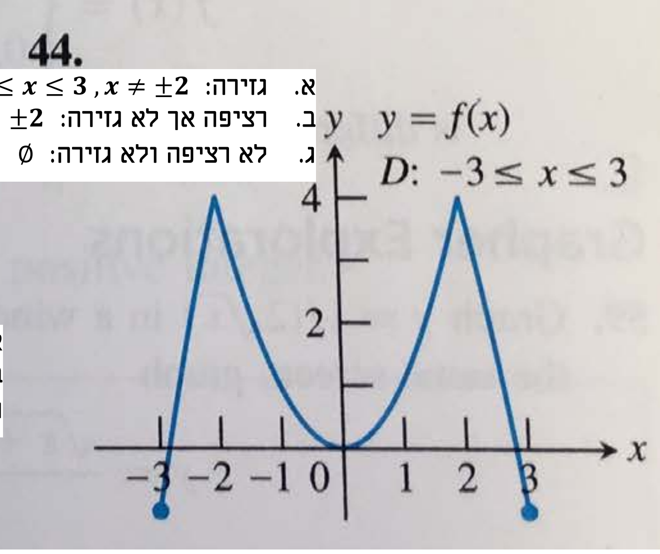


א. גזירה: $-1 \le x \le 2, x \ne 0$

ב. רציפה אך לא גזירה: $x = 0$

ג. לא רציפה ולא גזירה: $\emptyset$

44.



א. גזירה: $-3 \le x \le 3, x \ne \pm 2$

ב. רציפה אך לא גזירה: $x = \pm 2$

ג. לא רציפה ולא גזירה: $\emptyset$

4. צייר את הפונקציה y=-1/x (5 נק'). צייר בנפרד את נגזרתה של הפונקציה (5 נק').
מהם הערכים של x עבורם הנגזרת חיובית, אפס, שלילית (5 נק')?
עבור אילו ערכים של x הפונקציה עולה? עבור אילו ערכים של x היא יורדת? (5 נק')?