בעמוד זה נחפש גבולות של פונקציות רציפות בנקודות שבתוך תחום ההגדרה שלהן - נקודות שבהן גם הפונקציה וגם הגבול קיימים ושווים זה לזה בערכם. נשתמש לכן בהצבה למציאת ערך הפונקציה בנקודה ונבין שזהו גם ערך הגבול שלה בנקודה.

$$\lim_{x\to -7}(2x+5) = 2\cdot(-7)+5 = -9 \qquad \lim_{x\to 12}(10-3x) = 10-3\cdot 12 = -26$$

$$\lim_{x\to 2}(-x^2+5x-2) = -2^2+5\cdot 2-2 = 4$$

$$\lim_{x\to -2}(x^3-2x^2+4x+8) = (-2)^3-2(-2)^2+4\cdot(-2)+8 = -8-8-8+8 = -16$$

$$\lim_{t\to 6}8(t-5)(t-7) = 8(6-5)(6-7) = 8\cdot 1(-1) = -8$$

$$\lim_{s\to 2/3}3s(2s-1) = 3\cdot\frac{2}{3}\left(2\cdot\frac{2}{3}-1\right) = 2\cdot\left(\frac{4}{3}-1\right) = 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x+6} = \frac{2+3}{2+6} = \frac{5}{8} \qquad \lim_{x\to 5}\frac{4}{x-7} = \frac{4}{5-7} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$\lim_{y\to -5}\frac{y^2}{5-y} = \frac{(-5)^2}{5-(-5)} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$$

$$\lim_{y\to 2}\frac{y+2}{y^2+5y+6} = \frac{2+2}{2^2+5\cdot 2+6} = \frac{4}{4+10+6} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{x\to -1}3(2x-1)^2 = 3[2(-1)-1]^2 = 3[-2-1]^2 = 3[-3]^2 = 3\cdot 9 = 27$$

$$\lim_{x\to -4}(x+3)^{1984} = (-4+3)^{1984} = (-1)^{1984} = 1$$

$$\lim_{y\to -3}(5-y)^{4/3} = [5-(-3)]^{4/3} = [5+3]^{4/3} = 8^{4/3} = \sqrt[3]{8}^4 = 2^4 = 16$$

$$\lim_{z\to 0}(2z-8)^{1/3} = (2\cdot 0-8)^{1/3} = (-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8} = -2$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{3}{\sqrt{3h+1}+1} = \frac{3}{\sqrt{3\cdot 0+1}+1} = \frac{3}{\sqrt{1}+1} = \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{5}{\sqrt{5h+4}+2} = \frac{5}{\sqrt{5\cdot 0+4}+2} = \frac{5}{\sqrt{4}+2} = \frac{5}{2+2} = \frac{5}{4}$$

בעמודים הבאים נחפש גבולות של פונקציות רציפות בנקודות אי- הגדרה שלהן. מדובר כאן רק בנקודות אי-הגדרה שביטוין הגרפי הוא "חור" בגרף הפונקציה. באמצעות מניפולציה אלגברית "נסלק את החור" ובכך נהפוך את הפונקציה למוגדרת ורציפה בנקודה. אז נשתמש בהצבה למציאת ערך הפונקציה ה"חדשה" בנקודה, נבין שזהו גם ערך הגבול שלה בנקודה, ואם כך, גם ערך הגבול של הפונקציה המקורית בנקודה.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3h+1}-1}{h} = \frac{\sqrt{3\cdot 0+1}-1}{0} = \frac{\sqrt{1}-1}{0} = \frac{1-1}{0} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$\frac{\sqrt{3h+1}-1}{h} = \frac{\sqrt{3h+1}-1}{h}\cdot\frac{\sqrt{3h+1}+1}{\sqrt{3h+1}+1} = \frac{3h+1-1}{h\left(\sqrt{3h+1}+1\right)} = \frac{3h}{h\left(\sqrt{3h+1}+1\right)} = \frac{3}{\sqrt{3h+1}+1}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3}{\sqrt{3h+1}+1} = \frac{3}{\sqrt{3\cdot 0+1}+1} = \frac{3}{\sqrt{1}+1} = \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{5h+4}-2}{h} = \frac{\sqrt{5\cdot 0+4}-2}{0} = \frac{\sqrt{4}-2}{0} = \frac{2-2}{0} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$\frac{\sqrt{5h+4}-2}{h} = \frac{\sqrt{5h+4}-2}{h}\cdot\frac{\sqrt{5h+4}+2}{\sqrt{5h+4}+2} = \frac{5h+4-4}{h\left(\sqrt{5h+4}+2\right)} = \frac{5h}{h\left(\sqrt{5h+4}+2\right)} = \frac{5}{\sqrt{5h+4}+2}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{5}{\sqrt{5h+4}+2} = \frac{5}{\sqrt{5\cdot 0+4}+2} = \frac{5}{\sqrt{4}+2} = \frac{5}{2+2} = \frac{5}{4}$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{x^2-25} = \frac{5-5}{5^2-25} = \frac{5-5}{25-25} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$\frac{x-5}{x^2-25} = \frac{x-5}{(x+5)(x-5)} = \frac{1}{x+5}$$

$$= \lim_{x\to 5}\frac{1}{x+5} = \frac{1}{5+5} = \frac{1}{10}$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2+4x+3} = \frac{-3+3}{(-3)^2+4(-3)+3} = \frac{0}{9-12+3} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$\frac{x+3}{x^2+4x+3} = \frac{x+3}{(x+3)(x+1)} = \frac{1}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to -3}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{-3+1} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to -5}\frac{x^2+3x-10}{x+5} = \frac{(-5)^2+3(-5)-10}{-5+5} = \frac{25-15-10}{0} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$\frac{x^2+3x-10}{x+5} = \frac{(x+5)(x-2)}{x+5} = x-2$$

$$= \lim_{x\to -5}(x-2) = -5-2 = -7$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{x-2} = \frac{2^2-7\cdot 2+10}{2-2} = \frac{4-14+10}{0} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$\frac{x^2-7x+10}{x-2} = \frac{(x-5)(x-2)}{x-2} = x-5$$

$$= \lim_{x\to 2}(x-5) = 2-5 = -3$$

$$\lim_{t\to 1}\frac{t^2+t-2}{t^2-1} = \frac{1^2+1-2}{1^2-1} = \frac{1+1-2}{1-1} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$\frac{t^2+t-2}{t^2-1} = \frac{(t+2)(t-1)}{(t+1)(t-1)} = \frac{t+2}{t+1}$$

$$= \lim_{t\to 1}\frac{t+2}{t+1} = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{t\to -1}\frac{t^2+3t+2}{t^2-t-2} = \frac{(-1)^2+3(-1)+2}{(-1)^2-(-1)-2} = \frac{1-3+2}{1+1-2} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$\frac{t^2+3t+2}{t^2-t-2} = \frac{(t+2)(t+1)}{(t-2)(t+1)} = \frac{t+2}{t-2}$$

$$= \lim_{t\to -1}\frac{t+2}{t-2} = \frac{-1+2}{-1-2} = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{-2x-4}{x^3+2x^2} = \frac{-2(-2)-4}{(-2)^3+2(-2)^2} = \frac{4-4}{-8+2\cdot 4} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$\frac{-2x-4}{x^3+2x^2} = \frac{-2(x+2)}{x^2(x+2)} = -\frac{2}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to -2}\frac{-2}{x^2} = \frac{-2}{(-2)^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{5y^3+8y^2}{3y^4-16y^2} = \frac{5\cdot 0^3+8\cdot 0^2}{3\cdot 0^4-16\cdot 0^2} = \frac{0+0}{0-0} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$\frac{5y^3+8y^2}{3y^4-16y^2} = \frac{y^2(5y+8)}{y^2(3y^2-16)} = \frac{5y+8}{3y^2-16}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{5y+8}{3y^2-16} = \frac{5\cdot 0+8}{3\cdot 0^2-16} = \frac{8}{-16} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{u\to 1}\frac{u^4-1}{u^3-1} = \frac{1^4-1}{1^3-1} = \frac{1-1}{1-1} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$\frac{u^4-1}{u^3-1} = \frac{(u^2-1)(u^2+1)}{(u-1)(u^2+u+1)} = \frac{(u+1)(u-1)(u^2+1)}{(u-1)(u^2+u+1)} = \frac{(u+1)(u^2+1)}{(u^2+u+1)}$$

$$= \lim_{u\to 1}\frac{(u+1)(u^2+1)}{(u^2+u+1)} = \frac{(1+1)(1^2+1)}{(1^2+1+1)} = \frac{2\cdot 2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\lim_{v\to 2}\frac{v^3-8}{v^4-16} = \frac{2^3-8}{2^4-16} = \frac{8-8}{16-16} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$\frac{v^3-8}{v^4-16} = \frac{(v-2)(v^2+2v+4)}{(v^2-4)(v^2+4)} = \frac{(v-2)(v^2+2v+4)}{(v+2)(v-2)(v^2+4)} = \frac{v^2+2v+4}{(v+2)(v^2+4)}$$

$$= \lim_{v\to 2}\frac{v^2+2v+4}{(v+2)(v^2+4)} = \frac{2^2+2\cdot 2+4}{(2+2)(2^2+4)} = \frac{4+4+4}{4\cdot 8} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$$

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \frac{\sqrt{9}-3}{9-9} = \frac{3-3}{0} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$\frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{1}{\sqrt{x}+3}$$

$$= \lim_{x\to 9}\frac{1}{\sqrt{x}+3} = \frac{1}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}} = \frac{4\cdot 4-4^2}{2-\sqrt{4}} = \frac{16-16}{2-2} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$\frac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}} = \frac{x(4-x)}{2-\sqrt{x}} = \frac{x(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}{2-\sqrt{x}} = x(2+\sqrt{x})$$

$$= \lim_{x\to 4}[x(2+\sqrt{x})] = 4(2+\sqrt{4}) = 4(2+2) = 4\cdot 4 = 16$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} = \frac{1-1}{\sqrt{1+3}-2} = \frac{0}{\sqrt{4}-2} = \frac{0}{2-2} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} = \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}\cdot\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x+3-4} =$$

$$= \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1} = \sqrt{x+3}+2$$

$$= \lim_{x\to -1}(\sqrt{x+3}+2) = \sqrt{1+3}+2 = \sqrt{4}+2 = 2+2 = 4$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1} = \frac{\sqrt{(-1)^2+8}-3}{-1+1} = \frac{\sqrt{1+8}-3}{0} = \frac{\sqrt{9}-3}{0} = \frac{3-3}{0} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$\frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1} = \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+8}+3}{\sqrt{x^2+8}+3} = \frac{x^2+8-9}{(x+1)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)} =$$

$$= \frac{x^2-1}{(x+1)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+8}+3}$$

$$= \lim_{x\to -1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+8}+3} = \frac{-1-1}{\sqrt{(-1)^2+8}+3} = \frac{-2}{\sqrt{9}+3} = \frac{-2}{3+3} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+12}-4}{x-2} = \frac{\sqrt{(2)^2+12}-4}{2-2} = \frac{\sqrt{4+12}-4}{0} = \frac{\sqrt{16}-4}{0} = \frac{4-4}{0} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$\frac{\sqrt{x^2+12}-4}{x-2} = \frac{\sqrt{x^2+12}-4}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+12}+4}{\sqrt{x^2+12}+4} = \frac{x^2+12-16}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+12}+4\right)} =$$

$$= \frac{x^2-4}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+12}+4\right)} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+12}+4\right)} = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4} = \frac{2+2}{\sqrt{2^2+12}+4} = \frac{4}{\sqrt{4+12}+4} = \frac{4}{\sqrt{16}+4} = \frac{4}{4+4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}-3} = \frac{-2+2}{\sqrt{(-2)^2+5}-3} = \frac{0}{\sqrt{4+5}-3} = \frac{0}{\sqrt{9}-3} = \frac{0}{3-3} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}-3} = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}-3}\cdot\frac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3} = \frac{(x+2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{x^2+5-9} =$$

$$= \frac{(x+2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{x^2-4} = \frac{(x+2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{(x+2)(x-2)} = \frac{\sqrt{x^2+5}+3}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{x^2+5}+3}{x-2} = \frac{\sqrt{(-2)^2+5}+3}{-2-2} = \frac{\sqrt{4+5}+3}{-4} = \frac{\sqrt{9}+3}{-4} = \frac{3+3}{-4} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{2-\sqrt{x^2-5}}{x+3} = \frac{2-\sqrt{(-3)^2-5}}{-3+3} = \frac{2-\sqrt{9-5}}{0} = \frac{2-\sqrt{4}}{0} = \frac{2-2}{0} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$\frac{2-\sqrt{x^2-5}}{x+3} = \frac{2-\sqrt{x^2-5}}{x+3}\cdot\frac{2+\sqrt{x^2-5}}{2+\sqrt{x^2-5}} = \frac{4-(x^2-5)}{(x+3)\left(2+\sqrt{x^2-5}\right)} =$$

$$= -\frac{x^2-9}{(x+3)\left(2+\sqrt{x^2-5}\right)} = -\frac{(x+3)(x-3)}{(x+3)\left(2+\sqrt{x^2-5}\right)} = -\frac{x-3}{2+\sqrt{x^2-5}}$$

$$= \lim_{x\to -3}\left[-\frac{x-3}{2+\sqrt{x^2-5}}\right] = -\frac{-3-3}{2+\sqrt{(-3)^2-5}} = \frac{6}{2+\sqrt{9-5}} = \frac{6}{2+\sqrt{4}} = \frac{6}{2+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

נחפש כעת גבולות של <u>פונקציות רציפות</u> כאשר X שואף לאינסוף או למינוס אינסוף.
מדובר פה בגבול חד צדדי מתוך תחום ההגדרה, מן הסתם.

בעמוד זה נעסוק בפונקציות שהן מנה של פולינומים: $f_{(x)}=\frac{a_n x^m+a_{n-1}x^{m-1}+a_{n-2}x^{m-2}+\cdots+a_0}{b_n x^k+b_{n-1}x^{k-1}+b_{n-2}x^{k-2}+\cdots+a_0}$

ראשית נשתמש בקיצורים של מהנדסים:

אם $k<m$ (מונה מנצח) אז לא קיים הגבול ($\pm\infty$).

אם $m<k$ (מכנה מנצח) אז ערך הגבול הוא **0**.

אם $k=m$ (מונה ומכנה פיטים) אז ערך הגבול הוא מנת המקדמים $\frac{a_n}{b_n}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{5x+7}=\frac{2}{5}\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+3}{5x^2+7}=\frac{2}{5}\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4x+8}{3x^3}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2-7x+1}=0\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-7x}{x+1}=-\infty\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x^3}{12x^3+128}=\infty$$

כעת בלי קיצורים - כמו בספרים.

מחלקים מונה ומכנה בגורם הדומיננטי, ז"א ב- X בחזקתו הגבוהה ביותר.

מתקבלים איברים אשר שואפים לאפס (צבועים אדום) ולכן זניחים (בדרך כלל).

הערה: כאשר כל האיברים שבמונה או במכנה "אדומים", זה אשר שואף לאפס הכי לאט שורד ואין להזניחו.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{5x+7}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{5+\frac{7}{x}}=\frac{2}{5}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+3}{5x^2+7}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{3}{x^2}}{5+\frac{7}{x^2}}=\frac{2}{5}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4x+8}{3x^3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{8}{x^3}}{3}=\frac{0}{3}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2-7x+1}=\left[\frac{1}{\infty-\infty+1}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{1-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{0}{1}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-7x}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{7}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x^3}{12x^3+128}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{12}{x}+\frac{128}{x^4}}=\frac{1}{0^+}=\infty$$

נמשיך לחפש גבולות של <u>פונקציות רציפות</u> כאשר X שואף לאינסוף או למינוס אינסוף, אלא שכעת נעסוק בפונקציות מנה שבהן ישנה במונה או במכנה פונקציה חסומה (כמו פונקציות הסינוס או הקוסינוס אשר חסומות בין מינוס אחד לבין אחד). להזכירכם, איברים אדומים שואפים לאפס ולכן זניחים.

$$\lim_{\theta\to\infty}\frac{\cos\theta-1}{\theta} \quad = \quad 0$$

לכל θ מתקבל $-2<\cos\theta-1<0$, ז"א המונה חסום (בין 0 לבין 2-) בעוד המכנה גדל לאינסוף.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x+2\sqrt{x}}{x+\sin x} \quad = \quad \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{\sin x}{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}}{1+\frac{\sin x}{x}} \quad = \quad 1$$

חילקנו כאן את המונה ואת המכנה ב- X כדי שיקל לראות שכאשר X שואף לאינסוף "נשאר" 1 במונה ו- 1 במכנה.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{2/3}+x^{-1}}{x^{2/3}+\cos^2 x} \quad = \quad \lim_{x\to\infty}\frac{1+x^{-5/3}}{1+\frac{\cos^2 x}{x^{2/3}}} \quad = \quad 1$$

חילקנו כאן את המונה ואת המכנה ב- $x^{2/3}$ כדי שיקל לראות שכאשר X שואף לאינסוף "נשאר" 1 במונה ו- 1 במכנה.

בשני המקרים שלעיל יאמר המהנדס: "הדומיננטיים הם X במונה ו- X במכנה, אז מנת המקדמים היא 1 וזהו.

בעמודים הבאים נשוב לדון במקרים שבהם אנו מתקרבים ל"חור" בגרף של פונקציה רציפה, אלא שהפעם יהיו אלה חורים שלא ניתן לסלקם באמצעות מניפולציות אלגבריות ולכן נאלץ למצוא אלטרנטיבה להצבה. מהי האלטרנטיבה להצבה? פשוט לדעת מהו הגבול על פי תבנית מתאימה.

נתחיל בגבול "סינק" - מהצורה $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]$. לא ניתן לסלק כאן את ה"חור" שב- $x=0$, ולכן עלינו "פשוט לדעת" שגבול זה שווה 1. במקום X יכולה להיות כל "קופסה" שהיא: $\lim_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=\left[\frac{0}{0}\right]=1$.

אח"כ נמשיך לגבול אוילר - מהצורה $\lim_{\square\to 0}(1+\square)^{1/\square}=[1^\infty]$, שם "פשוט נדע" שהגבול הוא e.

גבול אוילר משמש לחישוב הגבול במקרים <u>מסוימים</u> של "חור" בפונקציה רציפה, ובמקרים <u>מסוימים</u> בהם $x\to\pm\infty$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot x = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0} x = 1\cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sin(x^2-x-2)}{x+1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to -1}\frac{\sin(x^2-x-2)}{x^2-x-2}\cdot\frac{x^2-x-2}{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to -1}\frac{\sin(x^2-x-2)}{x^2-x-2}\cdot\frac{(x+1)(x-2)}{x+1} = \lim_{x\to -1}\frac{\sin(x^2-x-2)}{x^2-x-2}\cdot(x-2) =$$

$$= \lim_{x\to -1}\frac{\sin(x^2-x-2)}{x^2-x-2}\cdot\lim_{x\to -1}(x-2) = 1\cdot(-3) = -3$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(1-\sqrt{x})}{x-1} = -\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\sqrt{x}-1)}{x-1} = -\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} =$$

$$= -\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = -\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+1} =$$

$$= -\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1} = -1\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)}{1-\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)}{1-\cos x}\cdot\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)}{1-\cos x}\cdot\frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)}{1-\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{1+\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)}{1-\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\lim_{x\to 0}\sin x}{\lim_{x\to 0} 1+\lim_{x\to 0}\cos x} = 1\cdot 1\cdot\frac{0}{1+1} = 0$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{\sin\sqrt{x}} = \lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x}{\sin\sqrt{x}} = \lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sin\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x} =$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}}{\sin\sqrt{x}}\cdot\lim_{x\to0^+}\sqrt{x} = 1\cdot1\cdot0 = 0$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1\cdot1 = 1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(x^2+x)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\sin(x^2+x)}{x^2+x}\cdot\frac{x^2+x}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\sin(x^2+x)}{x^2+x}\cdot\frac{x(x+1)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\sin(x^2+x)}{x^2+x}\cdot(x+1) = \lim_{x\to0}\frac{\sin(x^2+x)}{x^2+x}\cdot\lim_{x\to0}(x+1) = 1\cdot1 = 1$$

$$\lim_{x\to2}\frac{\sin(x^2-4)}{x-2} = \lim_{x\to2}\frac{\sin(x^2-4)}{x^2-4}\cdot\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to2}\frac{\sin(x^2-4)}{x^2-4}\cdot\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to2}\frac{\sin(x^2-4)}{x^2-4}\cdot(x+2) = \lim_{x\to2}\frac{\sin(x^2-4)}{x^2-4}\cdot\lim_{x\to2}(x+2) = 1\cdot(2+2) = 4$$

$$\lim_{x\to9}\frac{\sin(\sqrt{x}-3)}{x-9} = \lim_{x\to9}\frac{\sin(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}-3}\cdot\frac{\sqrt{x}-3}{x-9} =$$

$$= \lim_{x\to9}\frac{\sin(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}-3}\cdot\frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x\to9}\frac{\sin(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}-3}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+3} =$$

$$= \lim_{x\to9}\frac{\sin(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}-3}\cdot\lim_{x\to9}\frac{1}{\sqrt{x}+3} = 1\cdot\frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

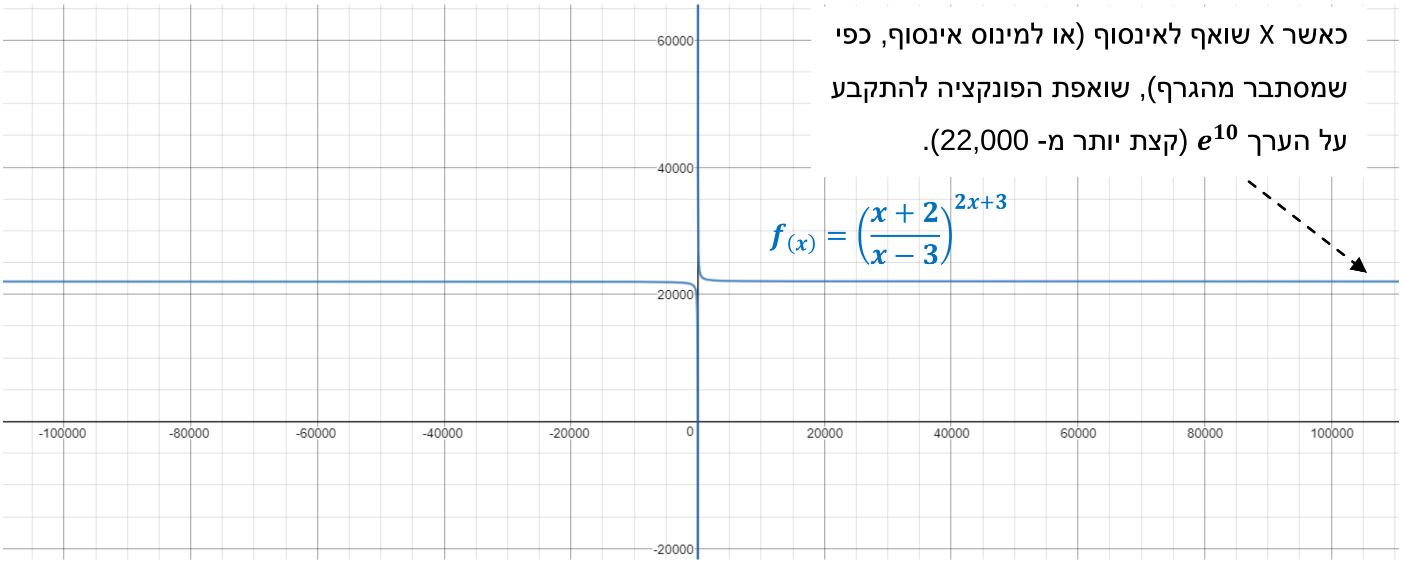
כעת שתי דוגמאות לגבול אוילר - $\boldsymbol{lim}_{\square\to 0}(1+\square)^{1/\square}=[1^{\infty}]=e$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{2x+3} = [1^{\infty}] =$$

$$\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{2x+3} = \left(\frac{x-3+5}{x-3}\right)^{2x+3} = \left(1+\frac{5}{x-3}\right)^{2x+3} = \left[\left(1+\frac{5}{x-3}\right)^{\frac{x-3}{5}\cdot\frac{5}{x-3}}\right]^{2x+3} =$$

$$= \left[\left(1+\frac{5}{x-3}\right)^{\frac{x-3}{5}}\right]^{\frac{5}{x-3}(2x+3)} = \left[\left(1+\frac{5}{x-3}\right)^{\frac{x-3}{5}}\right]^{\frac{10x+15}{x-3}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{x-3}\right)^{\frac{x-3}{5}}\right]^{\frac{10x+15}{x-3}} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{x-3}\right)^{\frac{x-3}{5}}\right]^{\frac{10+15/x}{1-3/x}} = e^{10}$$

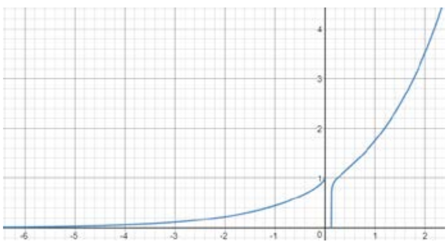


כאשר X שואף לאינסוף (או למינוס אינסוף), כפי שמסתבר מהגרף, שואפת הפונקציה להתקבע על הערך e^{10} (קצת יותר מ- 22,000).

$$\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{4x}\right)^{x} = [2^{\infty}] = \infty \quad \boldsymbol{easy, but\ nevertheless, use\ euler's\ limit\ for\ the\ sake\ of\ practice}:$$

$$\left(2-\frac{1}{4x}\right)^{x} = \left[2\left(1+\frac{-1}{8x}\right)\right]^{x} = 2^{x}\cdot\left(1+\frac{-1}{8x}\right)^{x} = 2^{x}\cdot\left[\left(1+\frac{-1}{8x}\right)^{\frac{8x}{-1}\cdot\frac{-1}{8x}}\right]^{x} = 2^{x}\cdot\left[\left(1+\frac{-1}{8x}\right)^{\frac{8x}{-1}}\right]^{-\frac{1}{8}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left\{2^{x}\cdot\left[\left(1+\frac{-1}{8x}\right)^{\frac{8x}{-1}}\right]^{-\frac{1}{8}}\right\} = \lim_{x\to\infty}2^{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{8x}\right)^{\frac{8x}{-1}}\right]^{-\frac{1}{8}} = \infty\cdot e^{-\frac{1}{8}} = \infty$$



ובכן, הפונקציה $f_{(x)}=\left(2-\frac{1}{4x}\right)^{x}$ אינה מתקבעת על ערך כלשהו כאשר X שואף לאינסוף, אלא גדלה לאינסוף.