שאלה מס' 17 מדף תרגילים מס' 3

א. מצאו את משוואת המשיק לעקומה $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ בנקודה $t = \frac{\pi}{3}$.

ב. חשבו גם $\frac{d^2y}{dx^2}$ בנקודה $t = \frac{\pi}{3}$.

נוסחה פרמטרית למציאת $\frac{dy}{dx}$

אם כל שלוש הנגזרות קיימות, ו- $\frac{dx}{dt} \neq 0$ , אז

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

פיתרון:

א.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} \quad => \quad m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{3}} = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{1 - \cos \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$x = t - \sin t \quad => \quad \left.x\right|_{t=\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{6}$$

$$y = 1 - \cos t \quad => \quad \left.y\right|_{t=\frac{\pi}{3}} = 1 - \cos \frac{\pi}{3} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

שיפוע המשיק הוא $m = \sqrt{3}$ ונקודת ההשקה היא $\left(\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{6} \,,\, \frac{1}{2}\right)$.

נוסחה למציאת משוואת ישר כאשר נתון שיפועו $m$ ונקודה $(x_1 \,,\, y_1)$ שעליו

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{1}{2} = \sqrt{3}\left(x - \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{6}\right) \quad => \quad y = \sqrt{3} \cdot x - \sqrt{3} \cdot \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2} = \sqrt{3} \cdot x - \sqrt{3} \cdot \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2} =$$

$$= \sqrt{3} \cdot x - \frac{2\sqrt{3}\pi - 9}{6} + \frac{1}{2} = \sqrt{3} \cdot x - \frac{2\sqrt{3}\pi - 12}{6} \quad => \quad y = \sqrt{3} \cdot x - \frac{\sqrt{3}\pi - 6}{3}$$

ב.

נוסחה פרמטרית למציאת $\frac{d^2y}{dx^2}$

אם המשוואות $x = f_{(t)}$ , $y = g_{(t)}$ מגדירות את $y$ כפונקציה גזירה פעמיים לפי $x$ ,

אז בכל נקודה שבה $\frac{dx}{dt} \neq 0$ מתקיים $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{\frac{d}{dt}\left[\frac{\sin t}{1 - \cos t}\right]}{dx/dt} = \frac{\frac{\cos t \cdot (1 - \cos t) - \sin t \cdot \sin t}{(1 - \cos t)^2}}{1 - \cos t} = \frac{\cos t \cdot (1 - \cos t) - \sin^2 t}{(1 - \cos t)^3} =$$

$$= \frac{\cos t - \cos^2 t - \sin^2 t}{(1 - \cos t)^3} = \frac{\cos t - \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)}{(1 - \cos t)^3} = \frac{\cos t - 1}{(1 - \cos t)^3} = -\frac{1 - \cos t}{(1 - \cos t)^3} = -\frac{1}{(1 - \cos t)^2}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{\left(1 - \cos \frac{\pi}{3}\right)^2} = -\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = -4$$