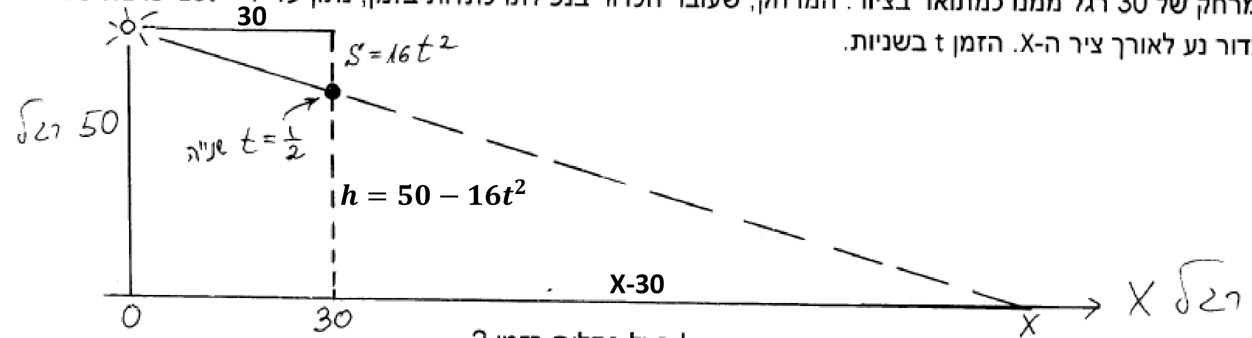
חדו"א 1 – בחינת אמצע סמסטר חורף דצמבר 2015

מרצה: **ד"ר יאיר דנקנר** מתרגלים: **גב' רגינה אובודנקו ומר ארז שדך** מתגבר: **מר אריה אברון**

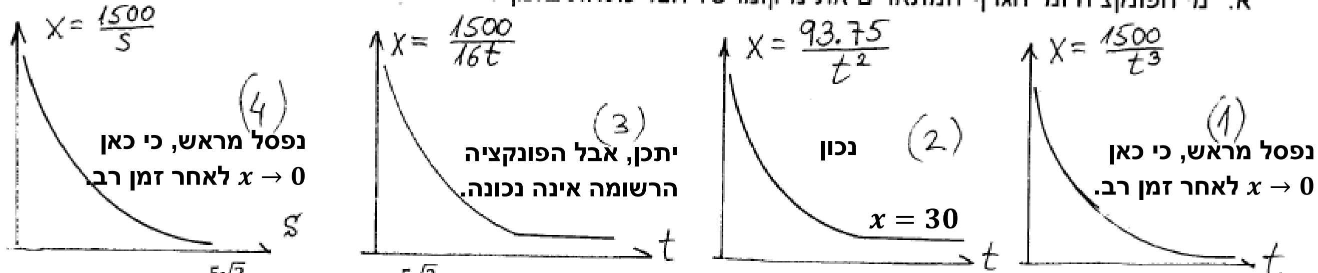
משך הבחינה: שעה וחצי. חומר עזר המותר בשימוש: דף נוסחאות ומחשבון אישי. ענה על כל השאלות. **בְּהַצְלָחָה!**

1. שימושי הנגזרת והבנת הנגזרת (50 נקו' סה"כ. כל סעיף 10 נקו')

עמוד תאורה שגובהו 50 רגל ניצב לציר X. כדור נופל נפילה חופשית מגובה של 50 רגל, במקביל לעמוד התאורה ובמרחק של 30 רגל ממנו כמתואר בציור. המרחק, שעובר הכדור בנפילתו כתלות בזמן, נתון על ידי $S=16t^2$. צלו של הכדור נע לאורך ציר ה-X. הזמן t בשניות.

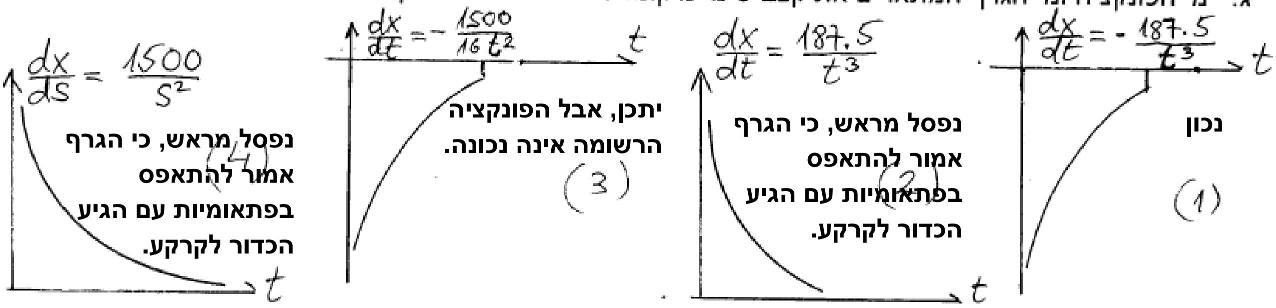


א. מי הפונקציה ומי הגרף המתארים את מיקומו של הצל כתלות בזמן ?



ב. תחום הגדרתה של הפונקציה הוא: (1) $0<t<\infty$ (2) $0\le t<\infty$ (3) $0<t\le\frac{5\sqrt{2}}{4}$ (4) $0<t<\frac{5\sqrt{2}}{4}$

ג. מי הפונקציה ומי הגרף המתארים את קצב שינוי מיקומו של הצל כתלות בזמן ?



ד. תוך שימוש בנוסחאות הגזירה שפיתחנו בכיתה, מצאנו כי, מהירות הצל כאשר t=1/2 שנייה היא 1500- רגל לשנייה. זה גם שיפועו של המשיק בנקודה. אסור שההסבר יעלה על שורה אחת.

(1) אם אנו מעוניינים לתאר את מהירות הצל בנקודה t=1/2 שנייה אז מדוע שיפוע המשיק אינו "הדבר האמיתי"?

(2) נלך להגדרת הנגזרת סביב t=1/2 שנייה ונציב $\Delta t=0.001$ שנייה. נקבל כי $\Delta x=-1.495$ רגל. מדוע מהירות הצל קבועה על 1495- רגל לשנייה לאורך מיתר זה? אילו היינו לוקחים Δt גדול יותר האם גם אז היינו מניחים מהירות קבועה לאורך המיתר?

ה. מה המשמעות המעשית לעובדה המתמטית כי מהירותו של הצל היא $\frac{dx}{dt}=-\infty$ ברגע t=0? הסבר בשורה אחת.

פיתרון:

א) מדמיון משולשים:

$$\frac{16t^2}{30}=\frac{50-16t^2}{x-30} \quad => \quad \frac{x-30}{30}=\frac{50-16t^2}{16t^2} \quad => \quad \frac{x-30}{15}=\frac{50-16t^2}{8t^2} \quad => \quad \frac{x-30}{15}=\frac{25-8t^2}{4t^2} \quad =>$$

$$=> \quad x-30=\frac{375-120t^2}{4t^2} \quad => \quad x=\frac{375-120t^2}{4t^2}+30 \quad = \frac{375-120t^2+120t^2}{4t^2}=\frac{375}{4t^2}=\frac{93.75}{t^2}$$

$$x_{(t)}=\frac{93.75}{t^2} \ \ [feet]$$

ב) תחום ההגדרה של $x_{(t)}$ הוא משך נפילת הכדור, החל ברגע אפס (לא כולל) וכלה ברגע פגיעתו בקרקע (כולל) :

$$16t^2=50 \quad => \quad t^2=\frac{25}{8} \quad => \quad t=\frac{5}{\sqrt{8}}=\frac{5}{2\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{4} \quad => \quad 0<t\le\frac{5\sqrt{2}}{4}$$

ג) כדי לקבל את קצב שינוי מיקומו של הצל כתלות בזמן, ז"א את מהירות הצל כתלות בזמן, עלינו לגזור את $x_{(t)}$ לפי זמן:

$$\frac{d}{dt}\left[x_{(t)}\right]=\frac{d}{dt}\left[\frac{93.75}{t^2}\right]=-\frac{93.75}{t^4}\cdot 2t=-\frac{187.5}{t^3} \ \ [feet/sec]$$

ד) 1. שיפוע המשיק אינו "הדבר האמיתי" כי בנקודה לא קורה דבר. הצל צריך לעבור כברת דרך כדי שנוכל למדוד שינוי.

2. מיתר הינו ישר - שיפועו קבוע. כאן השיפוע מייצג מהירות ולכן אנו מניחים מהירות קבועה, ללא קשר לגודלה של Δt.

ה) המשמעות המעשית לכך ש- $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=-\infty$ הינה שברגע תחילת תנועתו הצל נע במהירות אינסופית שמאלה.
זאת משום שברגע $t=0$ הוא ממוקם ב- $x=\infty$, ואילו שבריר שנייה Δt אח"כ מקומו מוגדר כבר ב- $x_{(\Delta t)}=\frac{93.75}{(\Delta t)^2}$.
מכאן שבשבריר השנייה Δt גמא הצל מרחק שגודלו אינסופי, $\infty-\frac{93.75}{(\Delta t)^2}$, ז"א מהירותו אינסופית בגודלה.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 2}\frac{x^2(x-2)-4(x-2)}{(x^2-4)^2} = \lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2-4\right)(x-2)}{(x^2-4)^2} =$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+5}\right)^{4x+1} = [1^{\infty}] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+5-7}{3x+5}\right)^{4x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-7}{3x+5}\right)^{4x+1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-7}{3x+5}\right)^{\frac{3x+5}{-7}}\right]^{\frac{-7}{3x+5}\cdot(4x+1)} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-7}{3x+5}\right)^{\frac{3x+5}{-7}}\right]^{-\frac{28x+7}{3x+5}} = e^{-\frac{28}{3}} = \frac{1}{e^{\frac{28}{3}}}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3/\cos x} = [1^{\infty}] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[(1+\cos x)^{1/\cos x}\right]^3 = e^3$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^3 x}{x\sin 2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x\left(1-\cos^2 x\right)}{x\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot\sin^2 x}{x\cdot 2\sin x\cdot\cos x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}$$

$$f_{(x)} = \begin{cases} x^2 & , \quad |x| \le 1 \quad => \quad -1 \le x \le 1 \\ 1/x & , \quad |x| > 1 \quad => \quad x < -1 \quad or \quad 1 < x \end{cases}$$

$$f'_{(x)} = \begin{cases} 2x & , \quad -1 \le x \le 1 \\ -1/x^2 & , \quad x < -1 \quad or \quad 1 < x \end{cases}$$

מהסרטוט של הפונקציה אפשר לראות שתחום ההגדרה שלה הוא **כל X**, ושהיא **רציפה** עבור $x \neq -1$:

$\lim_{x \to -1^-} f_{(x)} = -1 \neq f_{(-1)} = 1 \quad => \quad discontinuous$ at $x = -1$

$\lim_{x \to 1^-} f_{(x)} = 1 = f_{(1)} = \lim_{x \to 1^+} f_{(x)} \quad => \quad continuous$ at $x = 1$

הפונקציה אינה גזירה ב- $x = -1$ בשל **אי רציפות**, וב- $x = 1$ בשל "שפיץ" : $\lim_{x \to 1^-} f'_{(x)} = 2 \neq \lim_{x \to 1^+} f'_{(x)} = -1$