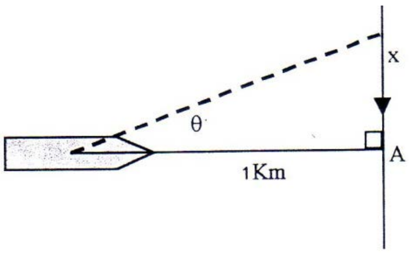
שאלה מבוחן אמצע - חורף 2001



סירה ממוקמת במרחק 1 ק"מ מהחוף.

על הסירה ישנו פנס אשר סורק את החוף בקצב של $\frac{d\theta}{dt} = -0.6\,{}^{\text{rad}}/_{\text{sec}}$.

מהי מהירות תנועתו לאורך החוף של אור הפנס כאשר הוא מגיע לנקודה A ?

פיתרון:

אנו מבינים שמהירות תנועתו לאורך החוף של אור הפנס היא $\frac{dx}{dt}$, וכמו כן שבנקודה A $\theta = 0$.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} \quad , \quad \frac{x}{1} = tg\theta \quad => \quad \frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{cos^2\theta} \quad => \quad \left.\frac{dx}{d\theta}\right|_{\theta=0} = \frac{1}{cos^2 0} = 1\ {}^{km}/_{rad}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} \quad => \quad \left.\frac{dx}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}\right|_{\theta=0} = 1\cdot(-0.6) = -0.6\ {}^{km}/_{sec}$$

ה"מינוס" בתוצאה משמעו ש- X מתקצר (ברור, כי הרי θ קטנה) שעה שאור הפנס מתקרב לנקודה A .

שאלה מבוחן אמצע - חורף 2002

גובה המים במיכל (במטרים) תלוי בזמן (בשעות) על פי הביטוי $y_{(t)} = 6\left(1-\frac{t}{12}\right)^2$.

ברגע $t = 0$ חולצים את הפקק שבתחתית המיכל ולאחר 12 שעות מתרוקנים כל המים שבמיכל.

א. מהו הרגע שבו יורדים פני המים בקצב מרבי, ומהו קצב זה?

ב. מהו הרגע שבו יורדים פני המים בקצב מזערי, ומהו קצב זה?

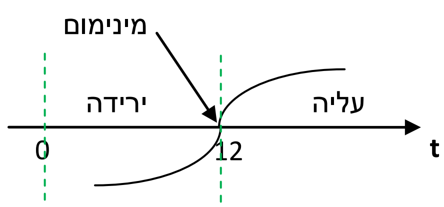
פיתרון:

ראשית נגזור לפי זמן את פונקצית גובה המים כדי לקבל את פונקצית הקצב שבו משתנה גובה זה :

$$\frac{dy}{dt} = 12\left(1-\frac{t}{12}\right)\cdot\left(-\frac{1}{12}\right) = \frac{t}{12} - 1\ \left[{}^{m}/_{hr}\right]$$

כעת נחפש נקודות קיצון פנימיות של $y_{(t)}$:

$$\frac{dy}{dt} > 0\ ascending \quad => \quad \frac{t}{12} - 1 > 0 \quad => \quad t - 12 > 0$$



קיבלנו שברגע $t = 12$ (הרגע שבו התרוקנו כל המים מהמיכל), יורדים פני המים בקצב מזערי.

נראה כעת באופן קורקטי שקצב מזערי זה הינו $lim_{t\to 12^-}\left[\frac{dy}{dt}\right] = lim_{t\to 12^-}\left[\frac{t}{12} - 1\right] = 0\ \left[{}^{m}/_{hr}\right]$.

הגיוני, כי הלחץ מכתיב את קצב יציאת המים מהמיכל, ז"א את קצב ירידת פני המים, וכשאין מים אין לחץ.

ענינו על סעיף ב' , ומה באשר לסעיף א' ?

ובכן, ברור שפני המים יורדים בקצב מרבי כאשר הלחץ מרבי, ז"א ברגע $t = 0^+$ כשהמיכל עדיין מלא.

קצב מרבי זה הינו $lim_{t\to 0^+}\left[\frac{dy}{dt}\right] = lim_{t\to 0^+}\left[\frac{t}{12} - 1\right] = -1\ \left[{}^{m}/_{hr}\right]$.