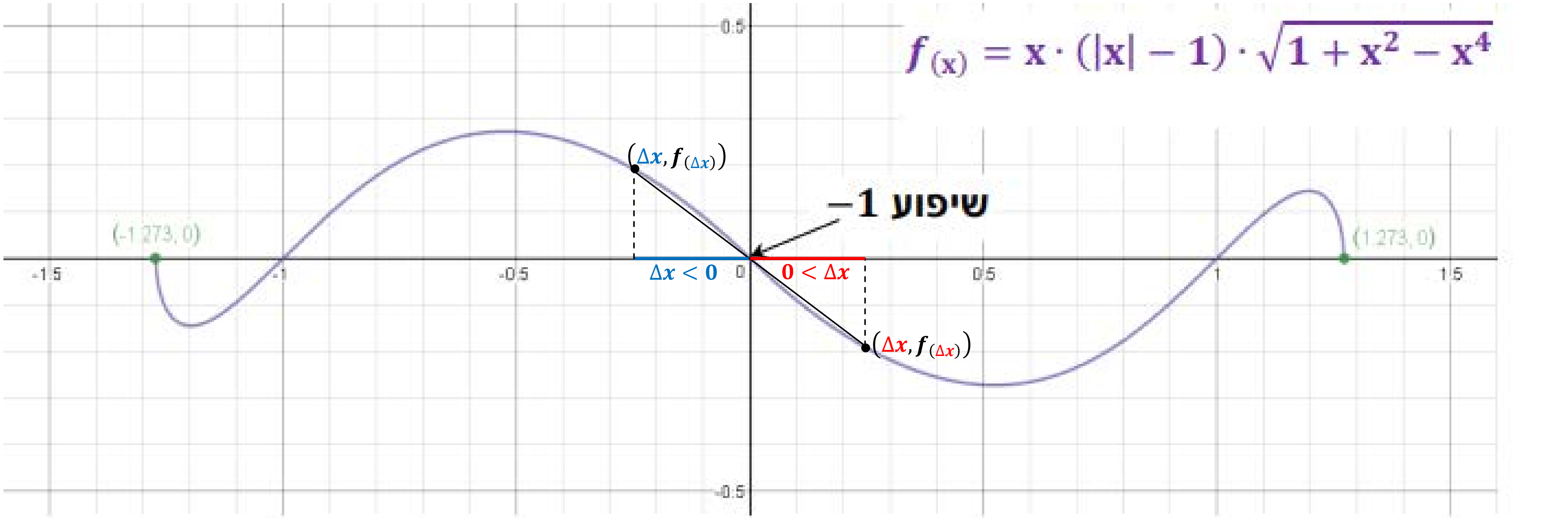
נגדיר $f_{(x)}=x\cdot(|x|-1)\cdot\sqrt{1+x^2-x^4}$. חשב את $f'_{(0)}$.

חישוב על פי הגדרת הנגזרת:

$$f'_{(x)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_{(x+\Delta x)}-f_{(x)}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)\cdot(|x+\Delta x|-1)\sqrt{1+(x+\Delta x)^2-(x+\Delta x)^4}-x\cdot(|x|-1)\cdot\sqrt{1+x^2-x^4}}{\Delta x}$$

$$f'_{(0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_{(0+\Delta x)}-f_{(0)}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(0+\Delta x)\cdot(|0+\Delta x|-1)\sqrt{1+(0+\Delta x)^2-(0+\Delta x)^4}-0\cdot(|0|-1)\cdot\sqrt{1+0^2-0^4}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)\cdot(|\Delta x|-1)\sqrt{1+(\Delta x)^2-(\Delta x)^4}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(\pm\Delta x-1)\sqrt{1+(\Delta x)^2-(\Delta x)^4}=-1\cdot 1=-1$$



זוהי למעשה פונקציה מפוצלת - שני ענפים אשר נפגשים ב- $x=0$. כשמתקרבים לנקודת המפגש משמאל ומימין, שואפות הנגזרות החד צדדיות לאותו הערך: -1 .

$$f_{(x)} = x \cdot (|x| - 1) \cdot \sqrt{1 + x^2 - x^4}$$

חישוב בעזרת נוסחאות הגזירה (הדרך ה"רגילה"). בשל הערך המוחלט שבפונקציה הנתונה, יש לפצל אותה לשתי פונקציות:

$$f_{(x)} = \begin{cases} -x \cdot (x+1) \cdot \sqrt{1 + x^2 - x^4} & x < 0 \\ x \cdot (x-1) \cdot \sqrt{1 + x^2 - x^4} & 0 \le x \end{cases}$$

For $x < 0$

$$f'_{(x)} = -\left\{(x+1) \cdot \sqrt{1 + x^2 - x^4} + x \cdot \sqrt{1 + x^2 - x^4} + \frac{2x - 4x^3}{2\sqrt{1 + x^2 - x^4}} \cdot x \cdot (x+1)\right\}$$

$$f'_{(x)} = -\left\{(x+1) \cdot \sqrt{1 + x^2 - x^4} + x \cdot \sqrt{1 + x^2 - x^4} + \frac{x - 2x^3}{\sqrt{1 + x^2 - x^4}} \cdot x \cdot (x+1)\right\}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f'_{(x)} = -\left\{(0+1) \cdot \sqrt{1 + 0^2 - 0^4} + 0 \cdot \sqrt{1 + 0^2 - 0^4} + \frac{0 - 2 \cdot 0^3}{\sqrt{1 + 0^2 - 0^4}} \cdot 0 \cdot (0+1)\right\} = -1$$

For $0 \le x$

$$f'_{(x)} = (x-1) \cdot \sqrt{1 + x^2 - x^4} + x \cdot \sqrt{1 + x^2 - x^4} + \frac{2x - 4x^3}{2\sqrt{1 + x^2 - x^4}} \cdot x \cdot (x+1)$$

$$f'_{(x)} = (x-1) \cdot \sqrt{1 + x^2 - x^4} + x \cdot \sqrt{1 + x^2 - x^4} + \frac{x - 2x^3}{\sqrt{1 + x^2 - x^4}} \cdot x \cdot (x+1)$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'_{(x)} = (0-1) \cdot \sqrt{1 + 0^2 - 0^4} + 0 \cdot \sqrt{1 + 0^2 - 0^4} + \frac{0 - 2 \cdot 0^3}{\sqrt{1 + 0^2 - 0^4}} \cdot 0 \cdot (0+1) = -1$$