

צייר את העקומה $y(x) = \frac{x^2+2x+4}{2x}$ תוך התייחסות לנקודות הבאות :

- (א) תחום הגדרה.
- (ב) זוגיות.
- (ג) עליה וירידה, נקודות קיצון אם קיימות וטיבן. מה קורה לנגזרת הראשונה כאשר $x = 0$? מה המשמעות?
- (ד) נקודות פיתול אם קיימות והנושא של קמירות וקעירות.
- (ה) האם קיימת אסימפטוטה משופעת?
- (ו) נקודות חיתוך עם הצירים וגרף הפונקציה.

פיתרון:

(א) תחום הגדרה: $x \neq 0$

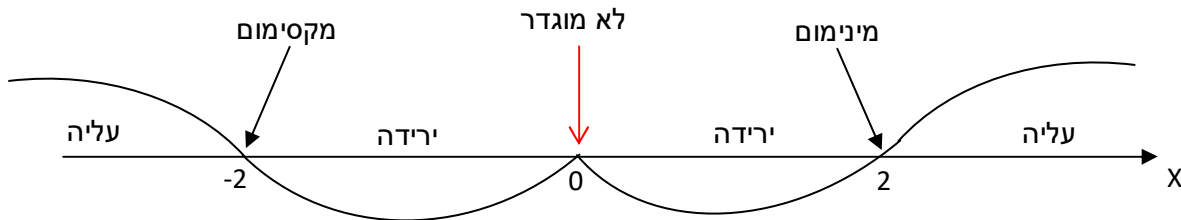
(ב)
$$f(-x) = \frac{(-x)^2+2(-x)+4}{2(-x)} = \frac{x^2-2x+4}{-2x} = -\frac{x^2-2x+4}{2x}$$

קיבלנו $f(-x) \neq -f(x)$ (הפונקציה אינה אי-זוגית) וכמו כן $f(-x) \neq f(x)$ (הפונקציה אינה זוגית).

(ג)

$$y'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+2)x - (x^2+2x+4)}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2-4}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x+2)(x-2)}{x^2} > 0 \text{ ascending}$$

$$x^2(x+2)(x-2) > 0 \text{ ascending}$$



תחום עליה: $x < -2$ or $2 < x$ תחום ירידה: $-2 < x < 2, x \neq 0$
 קיצון: $(-2, -1)$ max $(2, 3)$ min

כאשר $x = 0$ הנגזרת אינה מוגדרת מכיוון שהמכנה שלה מתאפס (צפוי, כי כך הדבר גם בפונקציה עצמה).
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} [y'(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} [y'(x)] = -\infty$ ומשמעות הדבר היא שהפונקציה יורדת בשיפוע אינסופי כאשר $x \rightarrow 0$, ז"א ציר Y מהווה אסימפטוטה אנכית לגרף הפונקציה.

(ד)

$$y''(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x \cdot x^2 - 2x(x^2-4)}{(x^2)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8x}{x^4} = \frac{4}{x^3} > 0 \text{ concave}$$

$$x^3 > 0 \Rightarrow x > 0 \text{ concave} \Rightarrow x < 0 \text{ convex}$$

תחום קעירות: $0 < x$ תחום קמירות: $x < 0$
 לפונקציה אין נקודת פיתול מפני שהמעבר (היחיד) מקמירות לקעירות מתרחש ב- $x = 0$ שם הפונקציה אינה מוגדרת.

ה) החזקה הגבוהה של x במונה של הפונקציה גדולה ב-1 מזו שבמכנה שלה, ולכן יש לפונקציה אסימפטוטה משופעת. בשיטה הכללית:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 + 2x + 4}{2x^2} \right] = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 + 2x + 4}{2x} - \frac{x}{2} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 + 2x + 4 - x^2}{2x} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{2x + 4}{2x} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x + 2}{x} \right] = 1, \quad y = \frac{1}{2}x + 1 \text{ slant asymptote}$$

כעת בשיטה שלנו:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{2}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{1}{2}x + 1 \text{ and that's it}$$

ו) עם ציר Y אין חיתוך משום שאינו בתחום ההגדרה של הפונקציה. כדי שיהיה חיתוך עם ציר X , על המונה של הפונקציה להתאפס, אך הדבר אינו קורה עבור שום x (הדלתא שלילית). הפונקציה אינה חותכת אם כך את הצירים.

