

נתון $y = \int_{\text{tg}x}^0 \frac{dt}{1+t^2}$. מצא את $\frac{dy}{dx}$ בשתי דרכים: (1) המשפט היסודי (2) חישוב האינטגרל וגזירת התוצאה

פיתרון 1:

$$y = -\int_0^{\text{tg}x} \frac{1}{1+t^2} dt \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{d}{dx} \int_0^{\text{tg}x} \frac{1}{1+t^2} dt \rightarrow \begin{cases} u = \text{tg}x \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{d}{du} \int_0^u \frac{1}{1+t^2} dt \cdot \frac{du}{dx} = -\frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx} = \\ &= -\frac{1}{1+\text{tg}^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = -1 \end{aligned}$$

פיתרון 2:

$$y = -\int_0^{\text{tg}x} \frac{dt}{1+t^2} = -\arctan t \Big|_0^{\text{tg}x} = -[\arctan(\text{tg}x) - \arctan 0] = -[x - 0] = -x$$

$$\frac{dy}{dx} = -1$$