

כדור שלג בעל רדיוס התחלתי של 12 ס"מ מתחיל להינמס ברגע $t = 0$ כך שרדיוסו קטן בקצב קבוע. הוא נעלם תוך 12 שעות.

(א) מהו קצב שינוי נפחו כאשר $t = 6$ שעות?

(ב) מהו הקצב הממוצע של שינוי נפחו בין $t = 3$ לבין $t = 9$ שעות?

פיתרון:

(א)

נתונים: $r_{(0)} = 12 \text{ cm} \Rightarrow V_{(0)} = \frac{4}{3}\pi \cdot 12^3 = 2,304\pi \text{ cm}^3$, $\frac{dr}{dt} = \text{const.}$, $r_{(12)} = 0 \Rightarrow V_{(12)} = 0$

$$\frac{dr}{dt} = \text{const.} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{r_{(12)} - r_{(0)}}{\Delta t} = \frac{0 - 12}{12} = -1 \frac{\text{cm}}{\text{hr}} \Rightarrow r_{(t)} = 12 - t \Rightarrow r_{(6)} = 6 \text{ cm}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} , \quad V_{(r)} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \Rightarrow \frac{dV}{dr} = 4\pi r^2 \Rightarrow \left. \frac{dV}{dr} \right|_{r=6} = 4\pi \cdot 6^2 = 144\pi \frac{\text{cm}^3}{\text{cm}}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} \Rightarrow \left. \frac{dV}{dt} \right|_{t=6} = \left. \frac{dV}{dr} \right|_{r=6} \cdot \left. \frac{dr}{dt} \right|_{t=6} = 144\pi \cdot (-1) = -144\pi \frac{\text{cm}^3}{\text{hr}}$$

אפשר גם אחרת - לבטא את תלותו של נפח הכדור בזמן (באמצעות הצבת $r_{(t)}$ בנוסחה ל- $V_{(r)}$) ואז לגזור את $V_{(t)}$ לפי זמן:

$$V_{(t)} = \frac{4}{3}\pi \cdot (12 - t)^3$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi(12 - t)^2 \cdot (-1) = -4\pi(12 - t)^2 \Rightarrow \left. \frac{dV}{dt} \right|_{t=6} = -4\pi \cdot 6^2 = -144\pi \frac{\text{cm}^3}{\text{hr}} \approx -0.45 \frac{\text{liter}}{\text{hr}}$$

(ב)

כדי לחשב קצב שינוי ממוצע, יש לחלק את השינוי שחל בפונקציה (ΔV) בפרק הזמן (Δt) שבו חל השינוי.

$$r_{(t)} = 12 - t \Rightarrow r_{(3)} = 9 \text{ cm} , \quad r_{(9)} = 3 \text{ cm} \Rightarrow V_{(3)} = \frac{4}{3}\pi \cdot 9^3 = 972\pi \text{ cm}^3 , \quad V_{(9)} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi \text{ cm}^3$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_{(9)} - V_{(3)}}{9 - 3} = \frac{36\pi - 972\pi}{6} = -156\pi \frac{\text{cm}^3}{\text{hr}} \approx -0.49 \frac{\text{liter}}{\text{hr}}$$

הגרף שמימין מתאר את נפח כדור השלג (בליטרים) כפונקציה של הזמן. קצותיו של המיתר האדום נוגעים בגרף בזמנים $t = 3$ ו- $t = 9$ שעות. קצב השינוי הממוצע של הנפח בין הזמנים הנ"ל הינו שיפוע המיתר האדום.

הישר השחור משיק לגרף בזמן $t = 6$.

קצב השינוי הרגעי של הנפח ב- $t = 6$ הינו שיפוע המיתר השחור.

ככל שיקטן אינטרוול הזמן Δt (תוך שמרכזו נותר קבוע ב- $t = 6$), ידמה יותר שיפועו של המיתר האדום לשיפועו של המשיק השחור, ז"א ידמה יותר קצב השינוי הממוצע של הנפח לזה הרגעי ב- $t = 6$.

