א. מצא את $f_{(2)}$ אם $\int_1^{f^2_{(x)}} \frac{1}{t}dt = x \cdot \cos\pi x$

$$\int_1^{f^2_{(x)}} \frac{1}{t}dt = x\cdot\cos\pi x \quad => \quad \ln|t|\Big|_1^{f^2_{(x)}} = x\cdot\cos\pi x \quad => \quad \ln f^2_{(x)} - \ln 1 = x\cdot\cos\pi x \quad =>$$

$$=> \quad 2\ln f_{(x)} - 0 = x\cdot\cos\pi x \quad => \quad \ln f_{(x)} = \frac{x\cdot\cos\pi x}{2} \quad => \quad f_{(x)} = e^{\frac{x\cdot\cos\pi x}{2}} \quad =>$$

$$=> \quad f_{(2)} = e^{\frac{2\cdot\cos\pi\cdot 2}{2}} = e^{\cos 2\pi} = e^1 = e$$

ב. מצא את $f_{(4)}$ אם $\int_1^{\sqrt{x}} f_{(t)}\,dt = x\cdot\cos(\pi x)$

המשפט היסודי של קלקולוס חלק 1

אם f רציפה על $[a,b]$ אז $F_{(x)} = \int_a^x f_{(t)}dt$ רציפה על $[a,b]$ וגזירה על $[a,b]$ ונגזרתה היא $f_{(x)}$:

$$F'_{(x)} = \frac{d}{dx}\int_a^x f_{(t)}dt = f_{(x)}$$

כאן הגבול העליון אינו x אלא $\sqrt{x}$, כך ש- $y = \int_1^{\sqrt{x}} f_{(t)}\,dt$ מורכבת בעצם משתי פונקציות :

$y = \int_1^{u} f_{(t)}\,dt$ ו- $u = \sqrt{x}$. כדי למצוא את $\frac{dy}{dx}$ יש להכיל את כלל השרשרת : $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

$$\frac{d}{dx}\int_1^{\sqrt{x}} f_{(t)}\,dt = \frac{d}{dx}[x\cdot\cos(\pi x)] \quad => \quad \frac{d}{du}\int_1^{u} f_{(t)}\,dt\cdot\frac{d}{dx}[u] = \frac{d}{dx}[x\cdot\cos(\pi x)] \quad =>$$

$$f_{(u)}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \cos(\pi x) - x\cdot\pi\cdot\sin(\pi x) \quad => \quad f_{(\sqrt{x})} = 2\sqrt{x}[\cos(\pi x) - x\cdot\pi\cdot\sin(\pi x)]$$

נברר כעת מהו ערכו של x כאשר $\sqrt{x} = 4$:

$$\sqrt{x} = 4 \quad => \quad x = 16$$

את הפתרון שהתקבל ל- x נציב בפונקציה $f_{(\sqrt{x})} = 2\sqrt{x}[\cos(\pi x) - x\cdot\pi\cdot\sin(\pi x)]$ שקיבלנו קודם:

$$f_{(4)} = f_{(\sqrt{16})} = 2\sqrt{16}[\cos(\pi\cdot 16) - 16\cdot\pi\cdot\sin(\pi\cdot 16)] = 8[1 - 16\cdot\pi\cdot 0] = 8$$