הוכח ש- $\int_0^x \int_0^u f_{(t)} dt\, du = \int_0^x f_{(u)}(x-u) du$

רמז: בטא את האינטגרל שבאגף ימין כהפרש של שני אינטגרלים, והראה שלשני האגפים ישנה נגזרת זהה לפי X .

פיתרון:

המשפט היסודי של קלקולוס חלק 1

אם f רציפה על $[a,b]$ אז $F_{(x)} = \int_a^x f_{(t)} dt$ רציפה על $[a,b]$ וגזירה על $[a,b]$ ונגזרתה היא $f_{(x)}$:

$$F'_{(x)} = \frac{d}{dx} \int_a^x f_{(t)} dt = f_{(x)}$$

$$\int_0^x \int_0^u f_{(t)} dt\, du = \int_0^x f_{(u)}(x-u) du$$

$$\int_0^x F_{(u)} du = \int_0^x x \cdot f_{(u)} du - \int_0^x u \cdot f_{(u)} du$$

$$\int_0^x F_{(u)} du = x \cdot \int_0^x f_{(u)} du - \int_0^x u \cdot f_{(u)} du$$

כעת נגזור את שני האגפים לפי X , ואם יישמר השוויון אז הצלחנו:

$$\frac{d}{dx} \int_0^x F_{(u)} du = \frac{d}{dx}\left[x \cdot \int_0^x f_{(u)} du - \int_0^x u \cdot f_{(u)} du\right]$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^x F_{(u)} du = \left\{\frac{d}{dx}\left[x \cdot \int_0^x f_{(u)} du\right]\right\} - \frac{d}{dx}\left[\int_0^x u \cdot f_{(u)} du\right]$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^x F_{(u)} du = \left\{\frac{dx}{dx} \cdot \int_0^x f_{(u)} du + x \cdot \frac{d}{dx} \int_0^x f_{(u)} du\right\} - \frac{d}{dx}\left[\int_0^x u \cdot f_{(u)} du\right]$$

$$F_{(x)} = 1 \cdot F_{(x)} + x \cdot f_{(x)} - x \cdot f_{(x)}$$

$$F_{(x)} = F_{(x)}$$

אם כך, אגף שמאל של המשוואה הנתונה שווה לאגף ימין שלה עד כדי קבוע C :

$$\int_0^x \int_0^u f_{(t)} dt\, du + C = \int_0^x f_{(u)}(x-u) du$$

אבל כאשר $x = 0$ שני האגפים של המשוואה המקורית שווים לאפס, ואם כך $C = 0$.

הוכחנו את שנדרשנו להוכיח.