לפונקציה f יש נגזרת שלילית לכל x וכן $f_{(1)} = 0$.

מי מהטענות הבאות נכונה עבור הפונקציה $h_{(x)} = \int_0^x f_{(t)}dt$? הסבר כל טענה.

א. $h_{(x)}$ גזירה פעמיים.

ב. $h_{(x)}$ וגם $\frac{dh}{dx}$ הן פונקציות רציפות.

ג. לגרף של $h_{(x)}$ יש משיק אופקי ב- $x = 1$.

ד. לגרף של $h_{(x)}$ יש מקסימום מקומי ב- $x = 1$.

ה. לגרף של $h_{(x)}$ יש מינימום מקומי ב- $x = 1$.

ו. לגרף של $h_{(x)}$ יש נקודת פיתול ב- $x = 1$.

ז. הגרף של $\frac{dh}{dx}$ חותך את ציר X ב- $x = 1$.

פיתרון:

המשפט היסודי של קלקולוס חלק 1

אם f רציפה על $[a,b]$ אז $F_{(x)} = \int_a^x f_{(t)}dt$ רציפה על $[a,b]$ וגזירה על $[a,b]$ ונגזרתה היא $f_{(x)}$:

$$F'_{(x)} = \frac{d}{dx}\int_a^x f_{(t)}dt = f_{(x)}$$

$$h_{(x)} = \int_0^x f_{(t)}dt \quad => \quad \frac{d}{dx}[h_{(x)}] = \frac{d}{dx}\int_a^x f_{(t)}dt = f_{(x)} \quad => \quad h'_{(x)} = f_{(x)} \quad => \quad h''_{(x)} = f'_{(x)}$$

נאמר בנתונים ש- $f'_{(x)} < 0$ לכל x , אז בעצם נאמר ש- $h''_{(x)} < 0$ לכל x , ז"א $h_{(x)}$ קמורה לכל x .

בנתונים נאמר גם ש- $f_{(1)} = 0$, ז"א $h'_{(1)} = 0$, ז"א השיפוע של $h_{(x)}$ מתאפס ב- $x = 1$.

מצוידים בתובנות אלה, נבדוק מי מהטענות נכונה:

א. $h_{(x)}$ גזירה פעמיים. נכון, כי $h''_{(x)} = f'_{(x)}$ ונאמר בנתונים כי $f'_{(x)}$ קיימת (ואף שלילית) לכל x .

ב. $h_{(x)}$ וגם $\frac{dh}{dx}$ הן פונקציות רציפות. נכון, כי אם $f'_{(x)}$ קיימת לכל x אז $f_{(x)} = h'_{(x)}$ רציפה - גזירות משמעה רציפות. מאותו הטעם, אם $h'_{(x)}$ רציפה אז $h_{(x)}$ רציפה.

ג. לגרף של $h_{(x)}$ יש משיק אופקי ב- $x = 1$. נכון, הסברנו קודם שהשיפוע של $h_{(x)}$ מתאפס ב- $x = 1$.

ד. לגרף של $h_{(x)}$ יש מקסימום מקומי ב- $x = 1$. נכון, כי השיפוע של $h_{(x)}$ מתאפס ב- $x = 1$ ו- $h_{(x)}$ קמורה שם.

ה. לגרף של $h_{(x)}$ יש מינימום מקומי ב- $x = 1$. לא נכון, השיפוע של $h_{(x)}$ מתאפס אומנם ב- $x = 1$ אך $h_{(x)}$ אינה קעורה שם.

ו. לגרף של $h_{(x)}$ יש נקודת פיתול ב- $x = 1$. לא נכון, כי אין ב- $x = 1$ מעבר מקמירות לקעירות או להיפך.

ז. הגרף של $\frac{dh}{dx}$ חותך את ציר X ב- $x = 1$. נכון, כי $h'_{(1)} = f_{(1)} = 0$ (נאמר בנתונים).